

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016
CLASA A XII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Calculați $\int_{-1}^1 x^{2017} \cdot \ln(1+e^x) dx$.

Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

Soluție.

Facem schimbarea de variabilă $t = -x$ 1p

$$I = -\int_1^{-1} (-t)^{2017} \cdot \ln(1+e^{-t}) dt \dots\dots\dots 1p$$

$$I = -\int_1^{-1} -t^{2017} \cdot \ln\left(\frac{1+e^t}{e^t}\right) dt \dots\dots\dots 1p$$

$$I = -\int_{-1}^1 t^{2017} \cdot \ln(1+e^t) dt + \int_{-1}^1 t^{2017} \cdot \ln(e^t) dt \dots\dots\dots 1p$$

$$2I = \int_{-1}^1 t^{2018} dt \dots\dots\dots 2p$$

$$I = \frac{1}{2019} \dots\dots\dots 1p$$

2. Fie (G, \bullet) un grup în care nu există elemente de ordin 2. Dacă $(xy)^2 = (yx)^2$, oricare ar fi $x, y \in G$, atunci arătați că (G, \bullet) este grup abelian.

Soluție.

Fie $x, y \in G$. Notăm cu $a = xy(yx)^{-1}$. Vom demonstra că $a^2 = e$ și cum G nu are elemente de ordin 2, obținem $a = e$, echivalent cu $xy = yx$, deci (G, \bullet) abelian.....1p

$$x^2 y^{-1} = ((xy)y^{-1})^2 y^{-1} = (y^{-1}(xy))^2 y^{-1} = y^{-1} x y y^{-1} x y y^{-1} = y^{-1} x^2 \Rightarrow xy^{-1} = x^{-1} y^{-1} x^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{și } xy^{-1} x^{-1} = x^{-1} y^{-1} x \Rightarrow x(xy)^{-1} = (yx)^{-1} x \dots\dots\dots 1p$$

Analog $y(yx)^{-1} = (xy)^{-1}y$ 1p

$$\begin{aligned} a^2 &= xy(yx)^{-1}xy(yx)^{-1} = xy((yx)^{-1}x)y(yx)^{-1} = xy(x(xy)^{-1})y(yx)^{-1} = xyx((xy)^{-1}y)(yx)^{-1} = \\ &= xyx(y(yx)^{-1})(yx)^{-1} = xyxy(yx)^{-1}(yx)^{-1} = (xy)^2(yx)^{-2} = (yx)^2(yx)^{-2} = e \Rightarrow (G, \bullet) \text{ grup abelian} \dots 2p \end{aligned}$$

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive astfel încât $f(0) = 1$ și există o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f care verifică relația $f(x) = 2016 \cdot F(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Calculați

$$\int \frac{f(x)}{f^2(x) + 2016} dx, x \in \mathbb{R}.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție.

$$F'(x) - 2016F(x) = 0 \mid \cdot e^{-2016x} \dots 1p$$

$$(F(x)e^{-2016x})' = 0 \Rightarrow F(x)e^{-2016x} = c \Rightarrow F(x) = ce^{2016x} \Rightarrow f(x) = 2016 \cdot ce^{2016x}, \forall x \in \mathbb{R} \dots 3p$$

$$f(0) = 1 = 2016 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{2016} \Rightarrow f(x) = e^{2016x} \dots 1p$$

$$\int \frac{e^{2016x}}{e^{2016 \cdot 2x} + 2016} dx = \frac{1}{2016} \cdot \frac{1}{\sqrt{2016}} \arctg \frac{e^{2016x}}{\sqrt{2016}} + c \dots 2p$$

4. Se consideră mulțimile:

$$G = M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2, H_1 = \{A \in G / A' = A\}, H_2 = \{A \in G / A' = -A\}, \lambda \in \mathbb{C} \text{ și}$$

$$H = \left\{ A = (a_{ke}) \in G / \sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^n a_{ke} = \lambda \right\}. \text{ Să se arate că:}$$

a) H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, +)$ și $\forall A \in G, \exists X_1 \in H_1$ și $X_2 \in H_2$ unice, astfel încât $A = X_1 + X_2$;

b) H este subgrup al lui $(G, +) \Leftrightarrow \lambda = 0$;

c) Pentru $\lambda \neq 0$, există pe H o lege de compoziție "*" astfel încât $(H, *)$ să fie grup abelian.

Dan Negulescu, G.M.

Soluție.

a) $H_1 \prec G \Leftrightarrow \forall A, B \in H_1 \Rightarrow A + B \in H_1$ și $\forall A \in H_1 \Rightarrow -A \in H_1$

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$

$$(-A)^t = -A^t = -A$$

$$H_2 \prec G$$

$$A, B \in H_2; (A + B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A + B) \dots\dots\dots 2p$$

$$(-A)^t = -A^t = -(-A) = A$$

$$\text{Fie } X_1 = \frac{A + A^t}{2}; X_1^t = \frac{A^t + A}{2} = X_1 \Rightarrow X_1 \in H_1$$

$$X_2 = \frac{A - A^t}{2}; X_2^t = \frac{A^t - A}{2} = -X_2 \Rightarrow X_2 \in H_2$$

$$X_1 + X_2 = A$$

b) $H \prec (G, +)$ $A, B \in H$; $A = (a_{ke}) \in G$ cu $\sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^n a_{ke} = \lambda$; $B = (b_{ke}) \in G$ cu $\sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^n b_{ke} = \lambda$

$$A + B = \sum (a_{ke} + b_{ke}) = \lambda + \lambda = 2\lambda$$

$$A + B \in H \Rightarrow 2\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda = 0$$

„ \Leftarrow ” $A, B \in H$, $A + B = \sum a_{ke} + b_{ke} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow A + B \in H$

$$A \in H, -A = -\sum a_{ke} = 0 \Rightarrow -A \in H \dots\dots\dots 2p$$

c) Fie $A * B = A + B - \frac{\lambda}{n} I_n$

$$\sum c_{ke} = \lambda + \lambda - \frac{\lambda}{n} n = \lambda \Rightarrow A * B \in H$$

$$A * B = B * A \text{ evident}$$

$$(A * B) * C = \left(A + B - \frac{\lambda}{n} \right) * C = A + B + C - \frac{2\lambda}{n}$$

$$A * (B * C) = A * \left(B + C - \frac{\lambda}{n} \right) = A + B + C - \frac{2\lambda}{n}$$

Element neutru este $U = \frac{\lambda}{n} I_n \in H$

$$\sum e_{ke} = \frac{\lambda}{n} n = \lambda$$

Element simetrizabil $A + A' - \frac{\lambda}{n} I_n = \frac{\lambda}{n} I_n \Rightarrow A' = -A + \frac{2\lambda}{n} I_n$

$\sum a'_{ke} = -\lambda + \frac{2\lambda}{n} n = \lambda, A' \in H \dots\dots\dots 3p$