

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A XII-A, SUBIECTE

1. Calculați $\int_{-1}^1 x^{2017} \cdot \ln(1+e^x) dx$.

Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

2. Fie (G, \bullet) un grup în care nu există elemente de ordin 2. Dacă $(xy)^2 = (yx)^2$, oricare ar fi $x, y \in G$, atunci arătați că (G, \bullet) este grup abelian.

* * *

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive astfel încât $f(0) = 1$ și există o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f care verifică relația $f(x) = 2016 \cdot F(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Calculați

$$\int \frac{f(x)}{f^2(x) + 2016} dx, x \in \mathbb{R}.$$

Carmen și Viorel Botea, Brăila

4. Se consideră mulțimile

$$G = M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2, H_1 = \{A \in G / A' = A\}, H_2 = \{A \in G / A' = -A\}, \lambda \in \mathbb{C} \text{ și}$$

$$H = \left\{ A = (a_{ke}) \in G / \sum_{k=1}^n \sum_{e=1}^n a_{ke} = \lambda \right\}. \text{ Să se arate că:}$$

a) H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(G, +)$ și $\forall A \in G, \exists X_1 \in H_1$ și $X_2 \in H_2$ unice, astfel încât $A = X_1 + X_2$;

b) H este subgrup al lui $(G, +) \Leftrightarrow \lambda = 0$;

c) Pentru $\lambda \neq 0$, există pe H o lege de compoziție "*" astfel încât $(H, *)$ să fie grup abelian.

Dan Negulescu, G.M.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

2. Listele cu elevii calificați la etapa județeană și baremele vor fi afișate la avizierul unităților școlare și pe site-ul matematicabr.weebly.com.