

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a  
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Arătați că dacă  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2016x + 1 = 0$ , atunci  $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Determinați cel mai mare număr natural  $k$  pentru care  $(2013! + 2014! + 2015!) : 2015^k$

3. Pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$  considerăm un punct  $A_0$  și pe  $AA_0$  un punct  $M$ . Notăm cu  $C_1$  și  $B_1$  punctele de intersecție  $BM \cap AC$  și  $CM \cap AB$ . Dreapta paralelă la  $BC$  prin punctul  $A$  intersectează dreptele  $A_0B_1$  și  $A_0C_1$  în punctele  $B_2$  și  $C_2$ . Arătați că punctul  $A$  este mijlocul segmentului  $[B_2C_2]$ .

4. Un ceas mecanic are un defect de fabricație. Astfel secundarul funcționează corect (sare una la o secundă), iar minutarul sare una la 90 de secunde, orarul sare una la fiecare 12 sărituri ale minutarului (ceasul are 60 de gradații).

a) De câte ori se suprapune secundarul și minutarul în decursul a 90 de minute?

b) În trei zile câte momente există în care și acest ceas și unul fără defect are cele trei ace de ceasornic suprapuse?

Olimpiada de matematică – clasa a X-a  
etapa zonală – 27 februarie 2016

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x^2+x}$ .

2. Arătați că  $\lg^2 2 + \lg^2 5 > \frac{5}{9}$

3. Arătați că dacă  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ ,  $|z| = 1$  și  $\operatorname{Im} z > 0$ , atunci

$$\left( \frac{|z+1| + |z-1|}{|z+i|} \right)^2 + \left( \frac{|z+1| - |z-1|}{|z-i|} \right)^2 = 4$$

4. Arătați că dacă  $M$  este un punct în planul triunghiului echilateral  $ABC$  de centru  $O$ , atunci proiecțiile punctului  $M$  pe dreptele  $BC$ ,  $AC$  și  $AB$  formează un triunghi al cărui centru de greutate este mijlocul segmentului  $OM$