

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 2

1. Fie $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ și $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Să se arate că $x^n + y^n \geq 2$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

$$x \cdot y = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ p}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$x^n + y^n = x^n + \frac{1}{x^n} \geq 2 \text{ deoarece } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

2. Să se demonstreze că:

$$a) \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \in \mathbb{N};$$

$$b) \frac{2}{4 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 14} + \frac{2}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{2}{2009 \cdot 2014} \in \left(0; \frac{1}{10}\right).$$

Rezolvare

$$a) \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} = 1 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$b) \frac{2}{4 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 14} + \frac{2}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{2}{2009 \cdot 2014} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14} + \frac{5}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{5}{2009 \cdot 2014} \right) = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{9-4}{4 \cdot 9} + \frac{14-9}{9 \cdot 14} + \dots + \frac{2014-2009}{2009 \cdot 2014} \right) = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2014} \right) = \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2014} \right) = \frac{201}{2014} \in \left(0; \frac{1}{10}\right) \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

3. Lungimiile muchiilor aparținând aceluiași vârf al unui paraleliped dreptunghic exprimate în centimetru sunt numere întregi diferite. Unul dintre muchii este 6 cm. Cât este suma celorlalte două muchii, dacă aria totală și volumul paralelipedului sunt exprimate cu același număr?

Rezolvare

Notăm cu a respectiv b lungimea celor două muchii aparținând vârfului cu o muchie de 6 cm.

$$\text{Atunci } A_f = 2(6a + ab + 6b) \text{ și } V = 6ab \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Avem } 6ab = 2(6a + ab + 6b) \text{ adică } 6a - 2ab + 6b = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow (a-3)(b-3) = 9 \text{ de unde } \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

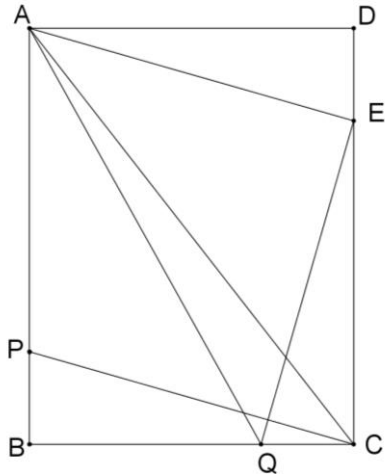
$$a = 4 \text{ și } b = 12 \text{ sau } a = 6 \text{ și } b = 6 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{A doua soluție nu satisface condițiile problemei, deci } a + b = 16 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Luăm punctul P pe cateta AB și punctul Q pe cateta BC astfel încât $AP = CB$ și $BP = CQ$. Să se demonstreze că unghiul format de segmentele AQ și CP este de 45° .

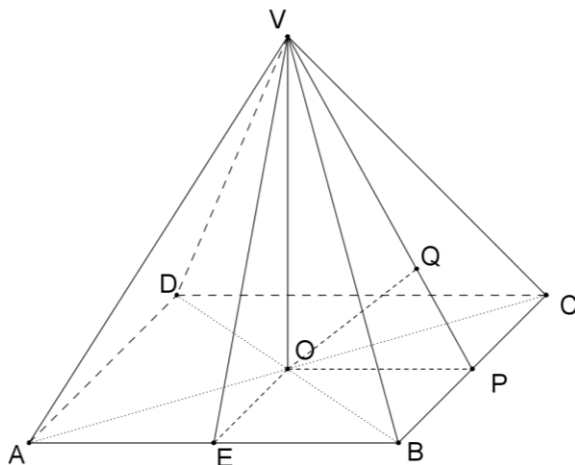
Rezolvare



Desen..... 1 p
Fie D a.î. $ABCD$ să fie dreptunghi și $E \in (CD)$: $AE \parallel CP$ 2 p
Atunci $APCE$ este paralelogram $\Rightarrow (AP) \equiv (EC) \Rightarrow (ED) \equiv (BP) \equiv (CQ)$ 2 p
 $\Rightarrow \triangle ADE \cong \triangle ECQ \Rightarrow (AE) \equiv (EQ)$ și $m(\angle AEQ) = 90^\circ$ 3 p
Rezultă $m(\angle AQ, CP) = m(\angle EAQ) = 45^\circ$ 1 p

5. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ se dă înălțimea $VO = 3\sqrt{2}$ cm, $AB = 6$ cm. Să se calculeze :
- Tangenta unghiului format de dreptele VA și DC
 - Măsura unghiului format de dreapta VA și proiecția dreptei VA pe planul bazei
 - Distanța de la punctul O la planul (VBC) .

Rezolvare



Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Desen1 p

a) Deoarece $DC \parallel AB$ tangenta unghiului format de dreptele VA și DC este

$$\operatorname{tg}(VAB) = \frac{VE}{AE} = \frac{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2}}{3} = \sqrt{3} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

b) Măsura unghiului format de dreapta VA și proiecția dreptei VA pe planul bazei este

$$m(VAO) = 45^\circ, \text{ deoarece } AO = VO = 3\sqrt{2} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$c) VP \perp BC, OQ \perp VP \text{ și } d(O, (VBC)) = OQ = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$