

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 1

1. Arătați că numărul $23^{27} + 27^{23}$ este divizibil cu 10

Rezolvare

$$\begin{aligned} u(23^{27}) &= u(23^3) = 7 && \dots\dots\dots 3 \text{ p} \\ u(27^{23}) &= u(27^3) = 3 && \dots\dots\dots 3 \text{ p} \\ \Rightarrow u(23^{27} + 27^{23}) &= 0 && \dots\dots\dots 2 \text{ p} \\ \Rightarrow (23^{27} + 27^{23}) &: 10 && \dots\dots\dots 1 \text{ p} \end{aligned}$$

2. La un număr natural format din patru cifre se adună numărul format din ultimele trei cifre, numărul format din ultimele două cifre și ultima cifră a numărului inițial și se obține 3042. Care este numărul de patru cifre? Câte soluții are problema?

Rezolvare

Conform ipotezei $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 3042$

Pentru cifra unităților avem două soluții: $d = 3(4 \cdot 3 = 12)$ sau $d = 8(4 \cdot 8 = 32)$ 1 p

Dacă $d = 3$

$$3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow u(3 \cdot c) = 3 \Rightarrow c = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Pentru cifra sutelor avem: $b = 0$ sau $b = 5$ 1 p

$b = 0$ nu corespunde, deci $b = 5$ 1 p

$$\Rightarrow a = 2 \text{ și numărul căutat este } 2513 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Dacă $d = 8$

$$3 \cdot 8 = 32 \Rightarrow u(3 \cdot c) = 1 \Rightarrow c = 7 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Pentru cifra sutelor avem: $b = 4$ sau $b = 9$ 1 p

Dacă $b = 4 \Rightarrow a = 2$ și numărul căutat este 2478 1 p

Dacă $b = 9 \Rightarrow a = 1$ și numărul căutat este 1978 1 p

3. Două eleve de clasa a V-a au cumpărat portocale și banane. Una dintre ele a plătit 35 de lei pentru 5kg de portocale și 4kg de banane, iar cealaltă a plătit 31 de lei pentru 7kg de portocale și 2kg de banane. Ce sumă ar trebui plătită pentru 4kg de portocale și 5kg de banane ?

Rezolvare

$$7\text{kg p} + 2\text{kg b} \dots\dots\dots 31\text{lei} \Rightarrow 14\text{kg p} + 4\text{kg b} \dots\dots\dots 62\text{lei} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\left. \begin{array}{l} 14\text{kg p} + 4\text{kg b} \dots\dots\dots 62\text{lei} \\ 5\text{kg p} + 4\text{kg b} \dots\dots\dots 35\text{lei} \end{array} \right\} \Rightarrow 9\text{kg p} \dots\dots\dots 27\text{lei} \Rightarrow 1\text{kg p} \dots\dots\dots 3\text{lei} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5\text{kg p} \dots\dots\dots 15\text{lei} \\ 5\text{kg p} + 4\text{kg b} \dots\dots\dots 35\text{lei} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\text{kg b} \dots\dots\dots 20\text{lei} \Rightarrow 1\text{kg b} \dots\dots\dots 5\text{lei} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 4\text{kg p} + 5\text{kg b} \dots\dots\dots 37\text{lei} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

4. Să se găsească mulțimile A și B care au fiecare câte 3 elemente, numere naturale, știind că ele satisfac următoarele condiții :

a) $4 \in A \cap B$;

b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in B$;

c) suma elementelor mulțimii B este triplul sumei elementelor mulțimii A .

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

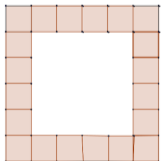
Rezolvare

- $4 \in A \cap B \Rightarrow 4 \in A$ și $4 \in B$ 1 p
- $x \in A \Rightarrow x^2 \in B \Rightarrow 2 \in A$ și $16 \in B$ 2 p
- $A = \{ 2, 4, a \}$, $B = \{ 4, 16, b \}$
- $\Rightarrow 4+16+b = 3 \cdot (2+4+a) \Rightarrow 20+b = 3 \cdot (6+a) \Rightarrow 20+b = 18+3a \Rightarrow$ 1 p
- $2+b = 3a$ și $a^2 = b \Rightarrow 2+a^2 = 3a \Rightarrow 2 = 3a - a^2 \Rightarrow 2 = a \cdot (3 - a)$ 2 p
- $\Rightarrow a = 1$ sau $a = 2$, dar 2 deja aparține lui A, deci $a = 1$ de unde și $b = 1$ 2 p
- Se obține $A = \{ 1, 2, 4 \}$, $B = \{ 1, 4, 16 \}$ 1 p

5. *Vrem să pavăm pardoseala unei bucătării de forma pătratică, cu plăci de faianță de formă pătrată, de aceeași mărime, fără să tăiem plăcile și fără spațiu între ele. La început am lipit plăcile lângă perețile bucătăriei. Pentru asta am folosit 20 de plăci, exact jumătatea plăcilor cumpărate. Va fi suficient cantitatea cumpărată pentru pavarea bucătăriei?*

Rezolvare

Dacă se ia ca unitate de măsură latura unei plăci, din cele 20 de plăci se formează un pătrat 6x6 3 p



Rămâne neacoperit un pătrat 4x4..... 3 p

Mai este nevoie de 16 plăci, deci cantitatea cumpărată este suficientă 3 p