

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Varianta 2

1. Câte numere naturale de patru cifre există cu proprietatea ca dacă scădem din numărul respectiv suma cifrelor sale rezultatul va fi 2016?

Rezolvare

Conform ipotezei $\overline{abcd} - a - b - c - d = 2016$

$$1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d = 999a + 99b + 9c = 2016 \Rightarrow 111a + 11b + c = 224 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\Rightarrow a \in \{1, 2\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Dacă } a = 1 \Rightarrow 11b + c = 113, \text{ dar } 11b + c \leq 11 \cdot 9 + 9 = 108 < 113 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Dacă } a = 2 \Rightarrow 11b + c = 2 \Rightarrow b = 0 \text{ și } c = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Deoarece } d \in \{1, 2, \dots, 9\} \text{ sunt 10 numere care satisfac condițiile problemei} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

2. Tatăl are 52 de ani, fiul lui 24. Cu câți ani în urmă era tatăl de cinci ori mai în vârstă decât fiul lui?

Rezolvare

$$\text{Cu } x \text{ ani în urmă tatăl era de cinci ori mai vârstnic decât fiul lui} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Atunci } 52 - x = 5 \cdot (24 - x) \Rightarrow 52 - x = 120 - 5x \dots\dots\dots 5 \text{ p}$$

$$\text{Rezultă } 4x = 68 \text{ și obținem } x = 17 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

3. Numărul $10^{2016} - 2014$ este pătrat perfect? Justificați răspunsul.

Rezolvare

$$10^{2016} - 2014 = 999 \dots 997986 \text{ cu 2012 cifre de 9} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\text{Suma cifrelor numărului este } 2012 \cdot 9 + 30 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$\text{Această sumă se divide cu 3 dar nu se divide cu pătratul său 9, deci numărul nu este pătrat perfect} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

4. La o grădiniță s-au cumpărat caiete și creioane, numărul creioanelor fiind de două ori mai mare decât cel al caietelor. La începutul primului semestru s-au distribuit copiilor câte 3 caiete și 7 creioane la fiecare, iar 50 de caiete și 52 de creioane au rămas pentru semestrul următor. Câți copii are grădinița?

Rezolvare

$$\text{Fie } n \text{ numărul copiilor din grădiniță} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Numărul caietelor cumpărate este } 3n + 50 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Numărul creioanelor cumpărate este } 7n + 52 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Avem atunci ecuația } 2(3n + 50) = 7n + 52 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Rezultă } n = 48. \text{ Numărul copiilor din grădiniță este 48} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

5. Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2016 dau câturi și resturi egale, se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive.

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Rezolvare

$n : 2016 = x(\text{rest } x), x < 2016$ 1 p

Numerele căutate sunt:

$0; 2016 \cdot 1 + 1; 2016 \cdot 2 + 2; 2016 \cdot 3 + 3; \dots; 2016 \cdot 2014 + 2014; 2016 \cdot 2015 + 2015$ 2 p

Suma lor este

$S = 2016 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014 + 2015) + (1 + 2 + 3 + \dots + 2014 + 2015)$ 2 p

De unde, aplicând formula lui Gauss obținem $S = 2016 \cdot 2015 \cdot 2016 : 2 + 2015 \cdot 2016 : 2$ 2 p

Atunci $2S = 2016 \cdot 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016 = 2015 \cdot 2016 (2016 + 1) = 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$ 2 p