

Olimpiada de matematică – clasa a X-a
etapa zonală – 27 februarie 2016
Soluții și bareme

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(x-1)^{x+2} = (x-1)^{x^2+x}$.

Soluție

Dacă $x-1 = -1$, avem $x = 0$ și $(-1)^2 = (-1)^0$ adevărat. 1p

Dacă $x-1 = 0$, avem $x = 1$ și $0^3 = 0^2$ adevărat. 1p

Dacă $x-1 = 1$, avem $x = 2$ și $1^4 = 1^6$ adevărat. 1p

Dacă $x-1 \notin -1, 0, 1$, atunci $x+2 = x^2+x \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ 1p

Dacă $x = -\sqrt{2}$, atunci $x-1 < 0$ și $x+2 \notin \mathbb{Z}$, deci nu există $(x-1)^{x+2}$ 1p

Dacă $x = \sqrt{2}$, atunci $x-1 > 0$, deci există $(x-1)^{x+2}$ 1p

Astfel mulțimea soluțiilor este $0, 1, 2, \sqrt{2}$ 1p

2. Arătați că $\lg^2 2 + \lg^2 5 > \frac{5}{9}$

Soluție

Notăm $\lg 2 = x$, atunci $\lg 5 = 1-x$ 2p

Inegalitatea de demonstrat devine $x^2 + (1-x)^2 > \frac{5}{9}$, echivalent cu $9x^2 - 9x + 2 > 0$, echivalent cu

$x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 4p

$\lg 2 < \frac{1}{3}$ deoarece $2 < \sqrt[3]{10}$, deci inegalitatea din enunț este adevărată. 1p

3. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $|z| = 1$ și $\operatorname{Im} z > 0$, atunci

$$\left(\frac{|z+1|+|z-1|}{|z+i|}\right)^2 + \left(\frac{|z+1|-|z-1|}{|z-i|}\right)^2 = 4$$

Soluție

Folosind relația $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, obținem

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{|z+1|+|z-1|}{|z+i|}\right)^2 + \left(\frac{|z+1|-|z-1|}{|z-i|}\right)^2 = \frac{|z+1|^2 + |z-1|^2 + 2|z^2-1|}{|z+i|^2} + \frac{|z+1|^2 + |z-1|^2 - 2|z^2-1|}{|z-i|^2} = \\ &= \frac{2|z|^2 + 2 + 2|z^2-1|}{|z|^2 + 1 + i\bar{z} - iz} + \frac{2|z|^2 + 2 - 2|z^2-1|}{|z|^2 + 1 - i\bar{z} + iz} = \frac{4 + 2|z^2-1|}{2 + i(\bar{z}-z)} + \frac{4 - 2|z^2-1|}{2 - i(\bar{z}-z)} \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

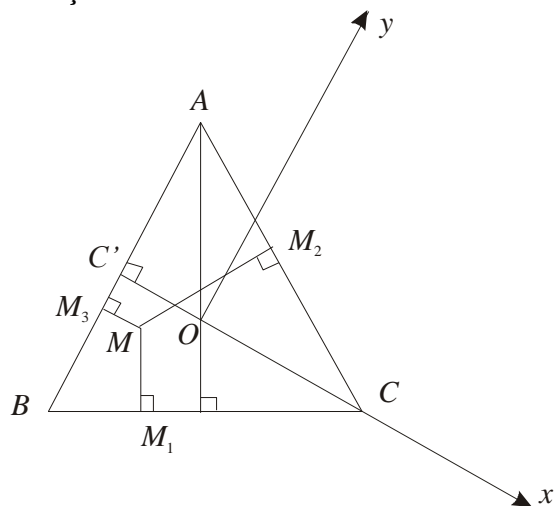
Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 + b^2 = 1$ și $b > 0$, deci avem în continuare

$$A = \frac{4 + 2|z^2-1|}{2 + 2b} + \frac{4 - 2|z^2-1|}{2 - 2b} = \frac{4 - 2b|z^2-1|}{1 - b^2} = \frac{4 - 2b|a^2 - b^2 - 1 + 2abi|}{a^2} =$$

$$= \frac{4 - 2b \sqrt{-2b^2 + 2abi}}{a^2} = \frac{4 - 4b^2 \sqrt{-b + ai}}{a^2} = \frac{4 - 4b^2 \sqrt{b^2 + a^2}}{a^2} = \frac{4(1 - b^2)}{a^2} = 4 \dots\dots\dots 4p$$

4. Arătați că dacă M este un punct în planul triunghiului echilateral ABC de centru O , atunci proiecțiile punctului M pe dreptele BC , AC și AB formează un triunghi al cărui centru de greutate este mijlocul segmentului OM .

Soluție



Fie punctul O originea sistemului dreptunghic cartezian, $OC = Ox$, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ una dintre rădăcini de ordinul trei ale unității, iar unitatea de măsură a sistemului fie lungimea segmentului $[OC]$.

Astfel afixe punctelor C, A și B sunt $c = 1$, $a = \varepsilon$ respectiv $b = \varepsilon^2$.

$$m_3 = -\frac{1}{2} + i \cdot \text{Im } m = -\frac{1}{2} + \frac{\overline{m} - m}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Prin rotirea figurei cu 120° , punctul de afix m va avea afixul $m' = m \cdot \varepsilon$, iar punctul cu afix m_2 va avea afixul

$$m'_2 = -\frac{1}{2} + \frac{m\varepsilon - \overline{m} \cdot \overline{\varepsilon}}{2}.$$

Printr-o nouă rotație cu 240° a figurei, punctul cu afixul m'_2 ajunge în punctul m_2 și

$$m_2 = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{m\varepsilon - \overline{m} \cdot \overline{\varepsilon}}{2} \right) = -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{m - \overline{m}\varepsilon}{2}.$$

Se rotește încă o dată figura cu 240° , în urma căruia m ajunge în punctul $m\varepsilon^2$, iar m_1 în

$$m'_1 = -\frac{1}{2} + \frac{m\varepsilon^2 - \overline{m} \cdot \overline{\varepsilon}}{2}.$$

$$\text{Printr-o ultimă rotație cu } 120^\circ, m_1 = \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \frac{m\varepsilon^2 - \overline{m} \cdot \overline{\varepsilon}}{2} \right) = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{m - \overline{m}\varepsilon^2}{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{În urma acestor rotații } m_1 = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{m - \overline{m}\varepsilon^2}{2}, m_2 = -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{m - \overline{m}\varepsilon}{2} \text{ și } m_3 = -\frac{1}{2} + \frac{m - \overline{m}}{2}.$$

$$\text{Obținem } G_{M_1M_2M_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = -\frac{1}{6} \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 + \frac{m}{2} - \frac{\overline{m}}{6} \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = \frac{m}{2}, \text{ deci } G_M \text{ este mijlocul segmentului } OM \dots\dots\dots 2p$$