

Olimpiada Națională de Matematică-etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VII-a

SUBIECTE:

1. Arătați că:

a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\frac{2013}{1 \cdot 2} + \frac{2012}{2 \cdot 3} + \frac{2011}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$

Supliment GM3/2014

2. Aflați numărul natural \overline{abc} , scris în baza 10, știind că:

$$10 \cdot \left(\frac{\overline{ab}}{c} - 1 \right) + \frac{\overline{bc}}{a} = 82$$

GM4/2011

3. Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se duce o paralelă la mediana AM, $M \in (BC)$. Paralela intersectează dreptele AB, respectiv AC în E, respectiv F. Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$;

b) DE + DF este constant.

Supliment GM3/2014

4. Fie M un punct în interiorul triunghiului $\triangle ABC$ astfel încât $\angle ABM \equiv \angle ACM$. Dacă P și Q sunt proiecțiile lui M pe AB, respectiv AC și E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$

GM10/2011

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică-etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VII-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

1. a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 1p

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ 1p

b) $\frac{2013}{1 \cdot 2} + \frac{2012}{2 \cdot 3} + \frac{2011}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} =$ 1p

$= 2013 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + 2012 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} + 2011 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2012 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2014} =$

$= 2013 \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{1} \right) + 2012 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + 2011 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots + 2 \left(\frac{2012}{2013} - \frac{2011}{2012} \right) + 1 \left(\frac{2013}{2014} - \frac{2012}{2013} \right) =$

.....2p

$= \frac{1}{2} (2013 - 2012) + \frac{2}{3} (2012 - 2011) + \frac{3}{4} (2011 - 2010) + \dots + \frac{2012}{2013} (2 - 1) + \frac{2013}{2014} =$ 1p

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$ 1p

Supliment GM3/2014

2. Relația devine $\frac{10 \cdot \overline{ab}}{c} + \frac{\overline{bc}}{a} = 92$ 2p

sau $\frac{\overline{ab0}}{c} + \frac{\overline{bc}}{a} = 92$ 1p

De aici putem scrie $\frac{\overline{abc}}{c} - 1 + \frac{\overline{abc}}{a} - 100 = 92$ 1p De

unde $\overline{abc} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = 193$ sau $\overline{abc}(a+c) = 193ac$ 1p

Cum 193 este număr prim avem 193 divide $\overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \in \{193, 386, 579, 772, 965\}$ 1p

Finalizare $\overline{abc} = 386$ 1p

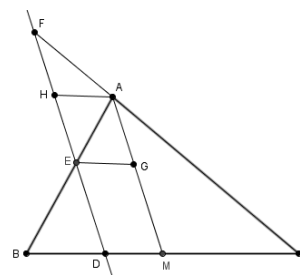
GM4/2011

3. a) M mijlocul [BC] \Rightarrow BM = MC

$$\text{AM} \parallel \text{DF} \xRightarrow{\text{Th. Thales}} \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC}$$

$$\text{DE} \parallel \text{AM} \xRightarrow{\text{Th. Thales}} \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{MB}$$

Finalizare $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$



..... 1p

..... 1p

..... 1p

b) Ducând EG | **DM și AH** | **DM obținem paralelogramele DEGM și DHAM**

..... 1p

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{AB} \text{ \textbf{şi} } \frac{CM}{CD} = \frac{AM}{DF} = \frac{AC}{FC}$$

..... 1p

$$DE + DF = \frac{BE \cdot AM}{AB} + \frac{FC \cdot AM}{AC} = AM \left(\frac{BE}{AB} + \frac{FC}{AC} \right)$$

..... 1p

$$DE + DF = AM \left(1 - \frac{AE}{AB} + 1 + \frac{AF}{AC} \right) = 2AM = ct.$$

..... 1p

Supliment GM3/2014

4. Fie R mijlocul lui $[MB]$ și S mijlocul lui $[MC]$

$$\text{În } \Delta BPM \text{ dr., } [PR] \text{ este mediană} \Rightarrow PR = \frac{MB}{2} = MR = RB$$

..... 1p

În $\triangle CQM$ dr, $[QS]$ este mediană $\Rightarrow QS = \frac{MC}{2} = SC = SM$

..... 1p

În $\triangle MBC$, $[RE]$ este linie mijlocie $\Rightarrow RE \parallel MC$, $RE = \frac{MC}{2}$, adică $RE \parallel MS$, $RE = MS$, deci

$RESM$ paralelogram $\Rightarrow RE = MS = SQ, SE = RM = PR$ și $\angle MRE \equiv \angle MSE$.

..... 1p

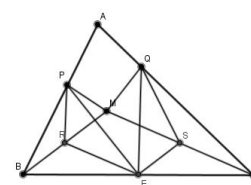
Dacă $m(\angle ABM) = m(\angle ACM) = x \Rightarrow m(\angle PRM) = m(\angle QSM) = 2x$

... 1p

$$m(\angle PRE) = 2x + m(\angle MRE) = 2x + m(\angle MSE) = m(\angle QSE)$$

.. 1p

$$\Delta PRE \equiv \Delta ESQ \text{ (L.U.L.)} \Rightarrow [EP] \equiv [EQ]$$



..... 2p

GM10/2011

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.