

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a VI-a

1. (7p) Determinați numărul \overline{ab} pentru care $\frac{\overline{a,(b)+b,(a)}}{a+b} = \frac{a+b}{3a}$.

GM12/2015

2. (3p) a) Se consideră numerele $a = 4n + 7$ și $b = 3n + 5$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $[a, b] = a \cdot b$, pentru orice număr natural n , unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

(4p) b) Arătați că numărul $n = 2017^{2015} + 2015^{2015}$ admite cel puțin 3 divizori numere prime.

Daniela Cismaș

3. (7p) Pe o dreaptă se consideră punctele distincte $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, în această ordine, astfel încât $A_0A_1 = 10$ cm, $A_1A_2 = 2 \cdot A_0A_1$, $A_2A_3 = 3 \cdot A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n = n \cdot A_0A_1$. Aflați numărul natural n , astfel încât $A_0A_n = 2016 \cdot 10085$.

Monica Guita

4. Se consideră unghiurile adiacente complementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$, punctele $D, E \in \text{Int}(\angle AOB)$, astfel încât $\angle AOD \equiv \angle DOE \equiv \angle EOB$, iar OF bisectoarea unghiului $\angle BOC$. Știind că $m(\angle EOF) = 39^\circ$, determinați:

(4p) a) $m(\angle AOB)$ și $m(\angle BOC)$.

(3p) b) $m(\angle DOM)$, unde OM este bisectoarea unghiului $\angle E'OC$, iar OE și OE' sunt semidrepte opuse.

Adina Oancea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 2 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a VI-a

$$1. \overline{a, (b)} + \overline{b, (a)} = a + \frac{a}{9} + b + \frac{b}{9} = \frac{10(a+b)}{9} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\frac{10}{9} = \frac{a+b}{3a} \dots\dots\dots (1p)$$

$$7a = 3b \dots\dots\dots (2p)$$

$$a \text{ și } b \text{ cifre, deci } a = 3 \text{ și } b = 7, \text{ adică } \overline{ab} = 37 \dots\dots\dots (2p)$$

$$2. a) \text{ Fie } d \text{ cel mai mare divizor comun al numerelor } a \text{ și } b, \text{ deci } d \mid (4n+7) \cdot 3 \text{ și } d \mid (3n+5) \cdot 4 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{obținem } d \mid (12n+21-12n-20), \text{ deci } d = 1 \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Dar } (a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b \text{ și cum } (a,b) = 1, \text{ rezultă } [a,b] = a \cdot b, \dots\dots\dots (1p)$$

$$b) \quad 2017^{2015} = (2016+1)^{2015} = M2016 + 1^{2015} \dots\dots\dots$$

$$(1p) \quad 2015^{2015} = (2016-1)^{2015} = M2016 - 1^{2015} \dots\dots\dots$$

$$(1p)$$

$$n = M2016 \dots\dots\dots (1p)$$

$$n = 2016 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 48 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ și cum } 2, 3, 7 \text{ sunt numere prime, rezultă că } n \text{ are cel puțin } 3 \text{ divizori numere prime} \dots\dots\dots (1p)$$

$$3. A_0 A_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots A_{n-1} A_n \dots\dots\dots (2p)$$

$$A_0 A_1 + A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots A_{n-1} A_n = A_0 A_1 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 10 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 5n(n+1) \dots\dots\dots (3p)$$

$$A_0 A_n = 2016 \cdot 2017 \cdot 5 \dots\dots\dots (1p)$$

$$n = 2016 \dots\dots\dots (1p)$$

$$4. a) m(\angle EOB) + m(\angle BOF) = 39^\circ \dots\dots\dots (0,5p)$$

$$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 90^\circ \dots\dots\dots (0,5p)$$

$$\angle AOD \equiv \angle DOE \equiv \angle EOB \text{ și } \angle BOF \equiv \angle FOC \Rightarrow 3m(\angle EOB) + 2m(\angle BOF) = 90^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\Rightarrow m(\angle EOB) = 12^\circ, \text{ deci } \Rightarrow m(\angle AOB) = 3m(\angle EOB) = 36^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$\Rightarrow m(\angle BOC) = 54^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$b) m(\angle EOE') = 180^\circ \Rightarrow m(\angle E'OC) = 180^\circ - m(\angle EOB) - m(\angle BOC) = 114^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$m(\angle E'OM) = m(\angle MOC) = 57^\circ \dots\dots\dots (1p)$$

$$m(\angle DOM) = 2m(\angle EOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COM) = 135^\circ \dots\dots\dots (1p)$$