

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREME

1. Se consideră numărul $a = \sqrt{7 + \sqrt{33}} - \sqrt{7 - \sqrt{33}}$.

a) Arătați că a^2 este număr natural; (2p)

b) Dacă $b = (a - 2)^{2016}$, aflați partea întreagă a numărului b; (2p)

c) Știind că $c = (a^4 + a^3 - 6a^2 - 6a - 1)^{2016}$, stabiliți dacă $c \in (0, 2)$. (3p)

Barem de corectare

a) $a^2 = (\sqrt{7 + \sqrt{33}} - \sqrt{7 - \sqrt{33}})^2 = 7 + \sqrt{33} - 2\sqrt{49 - 33} + 7 - \sqrt{33} = 6 \in \mathbb{N}$ 2p

b) Avem: $2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow 0 < \sqrt{6} - 2 < 1 \Rightarrow 0^{2016} < (\sqrt{6} - 2)^{2016} < 1^{2016}$ 1p

$\Rightarrow 0 < b < 1 \Rightarrow [b] = 0$ 1p

c) $c = (a^4 + a^3 - 6a^2 - 6a - 1)^{2016}$
 $= [a^2(a^2 - 6) + a(a^2 - 6) - 1]^{2016}$ 2p

$= (-1)^{2016} = 1 \in (0, 2)$ 1p

2. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Arătați că :

$$\text{a)} \sqrt{4a^2 + 4b^2 + c^4} + \sqrt{4a^2 + 4c^2 + b^4} + \sqrt{4c^2 + 4b^2 + a^4} = 5; \quad (4p)$$

$$\text{b)} -\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3}. \quad (3p)$$

Barem de corectare

a) $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 4 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 4 - 4c^2$. Analog celelalte..... 1p

$$\sqrt{4a^2 + 4b^2 + c^4} + \sqrt{4a^2 + 4c^2 + b^4} + \sqrt{4c^2 + 4b^2 + a^4} =$$

$$= \sqrt{4 - 4c^2 + c^4} + \sqrt{4 - 4b^2 + b^4} + \sqrt{4 - 4a^2 + a^4} =$$

$$= \sqrt{(2 - c^2)^2} + \sqrt{(2 - b^2)^2} + \sqrt{(2 - a^2)^2} = |2 - c^2| + |2 - b^2| + |2 - a^2| \dots\dots 2p$$

$$= 6 - (a^2 + b^2 + c^2) = 6 - 1 = 5 \dots\dots\dots 1p$$

b) Din inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ rezultă: $ab + bc + ac \leq 1$ 1p

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \leq 1 + 2 = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow |a + b + c| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

3. În cubul ABCDA'B'C'D' se notează cu P proiecția punctului C' pe diagonala A'C.
Demonstrați că dreptele AP și D'P sunt perpendiculare.

Barem de corectare

Notează $AB = a$ și calculează: $AC = a\sqrt{2}$, $A'C = a\sqrt{3}$, $PC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și $A'P = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ 1p

Notează cu S și T proiecțiile lui P pe AC și respectiv A'D'

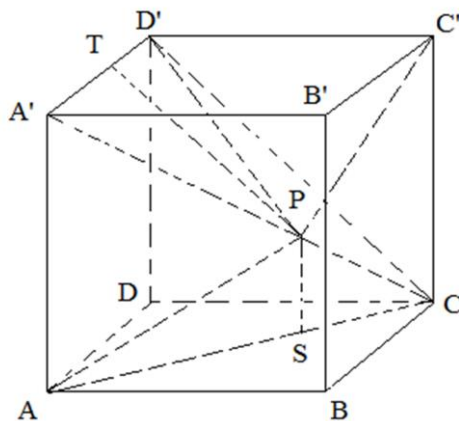
Din asemănarea triunghiurilor $\triangle CPS$ și $\triangle CA'A$ calculează $PS = \frac{a}{3}$ și $AS = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ 2p

Calculează $AP = a$ în triunghiul dreptunghic $\triangle PSA$ 1p

Din asemănarea triunghiurilor $\triangle A'PT$ și $\triangle A'CD'$ calculează $PT = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ și $TD' = \frac{a}{3}$ 1p

Calculează $D'P = a$ în triunghiul dreptunghic $\triangle PTD'$ 1p

Finalizează folosind Reciproca Teoremei lui Pitagora1p



4. Fie ABCD un trapez dreptunghic cu $m(\angle D) = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB = 2\text{cm}$, $DC = 6\text{cm}$ și $AD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$. Pe perpendiculara în D pe planul (ABC) se consideră punctul E astfel încât $DE = 8\text{cm}$. Fie $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 2\text{ cm}$.

a) Demonstrați că $AM \perp (EDM)$; (4p)

b) Calculați distanța de la punctul D la planul (AEM). (3p)

Barem de corectare

a) Calculează $BC = 8\text{ cm}$ și arată că $\triangle DMC$ este echilateral1p

Prin calcul găsește $m(\angle ADM) = 30^\circ$ și $m(\angle DAM) = 60^\circ$ 1p

$\Rightarrow AM \perp DM$ 1p

$AM \perp DE$ și finalizare1p

b) Fie $DF \perp EM$, $F \in ME$,

$EM \perp AM$, $DM \perp AM$ și EM , $AM \subset (AEM) \Rightarrow$ cu R2 T3 $\perp \Rightarrow DF \perp (AEM)$ 2p

Calculează $DF = 4,8\text{ cm}$ 1p