

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 21.02.2016

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau, de asemenea, câtul egal cu restul.

G.M.

SUBIECTUL 2

- a) Fie numerele: $a = 7^7 + 7^7 + 77$ și $b = 7 + 7$. Aflați restul împărțirii numărului a la b .
b) Se poate scrie numărul $N = 1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^{76}$ folosind numai trei cifre de 7 ?

R.M.T.

SUBIECTUL 3

- a) Arătați că egalitatea $x^2 + y^3 = z^5$ este verificată pentru $x = 2^{12}$, $y = 2^8$, $z = 2^5$.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale x , y , z pentru care $x^2 + y^3 = z^5$.

SUBIECTUL 4

- a) Scrieți trei numere de forma \overline{abca} divizibile cu 13.
b) Câte numere de forma \overline{abca} sunt divizibile cu 13 ?

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau, de asemenea, câtul egal cu restul.

Dacă n este un număr cu proprietățile date, atunci $n = 17 \cdot c_1 + c_1 = 18c_1$, $c_1 < 17$ și $n = 23 \cdot c_2 + c_2 = 24c_2$, $c_2 < 23$.	2p
$18c_1 = 24c_2$, de unde $3c_1 = 4c_2$.	2p
Ceea ce înseamnă că c_1 este multiplu de 4 și $c_1 < 17$, atunci $c_1 \in \{4, 8, 12, 16\}$.	2p
De unde $n \in \{72, 144, 216, 288\}$.	1p

SUBIECTUL 2

- a) Fie numerele $a = 7^7 + 7^7 + 77$ și $b = 7 + 7$. Aflați restul împărțirii numărului a la b .
b) Se poate scrie numărul $N = 1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^{76}$ folosind numai trei cifre de 7 ?

a) $7^7 + 7^7 + 77 = 2 \cdot 7^7 + 77 = 14 \cdot 7^6 + 70 + 7 = 14(7^6 + 5) + 7$, restul este 7.	3p
b) $N = 1 + 6 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \dots + 6 \cdot 7^{76} = 7 + (7-1) \cdot 7 + (7-1) \cdot 7^2 + \dots + (7-1) \cdot 7^{76}$	2p
$= 7 + 7^2 - 7 + 7^3 - 7^2 + \dots + 7^{77} - 7^{76}$	1p
$= 7^{77}$.	1p

SUBIECTUL 3

- a) Arătați că egalitatea $x^2 + y^3 = z^5$ este verificată pentru $x = 2^{12}$, $y = 2^8$, $z = 2^5$.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale x, y, z pentru care $x^2 + y^3 = z^5$.

a) $(2^{12})^2 + (2^8)^3 = (2^5)^5$	1p
$2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$	1p
$2^{24} \cdot 2 = 2^{25}$.	1p
b) Dacă luăm exemplul dat la a) exponentul lui 2 se poate lua de forma $30n + 24$.	2p
Și atunci $x = 2^{15n+12}$, $y = 2^{10n+8}$, $z = 2^{6n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.	1p
Egalitatea $2^{30n+24} + 2^{30n+24} = 2^{30n+25}$ arată că există o infinitate de numere naturale x, y, z pentru care $x^2 + y^3 = z^5$.	1p

SUBIECTUL 4

- a) Scrieți trei numere de forma \overline{abca} divizibile cu 13.
b) Câte numere de forma \overline{abca} sunt divizibile cu 13 ?

a) Pentru fiecare exemplu 1p.	3p
b) $\overline{abca} = 1001a + 10 \cdot bc$. Cum $1001a : 13$, oricare ar fi cifra a de la 1 la 9, rezultă că \overline{bc} sunt multiplii lui 13 de două cifre, inclusiv 00, în total 8.	2p
Și atunci există $9 \cdot 8 = 72$ numere de forma \overline{abca} divizibile cu 13.	2p