



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 21 FEBRUARIE 2016

**Clasa a X-a**

**Problema 1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a)  $a^x - x^a = 1$ , unde  $a \in (0,1)$ ,  $a$  fixat;

b)  $7^{2x} + 30^x = 3^{2x} + 70^x$ ;

c)  $2^{5x} + 3^{2x} + 7^x = 3 \cdot 2016^{\frac{x}{3}}$ .

**Problema 2.** Se consideră propozițiile  $P_1$ : „ $(\exists)x, y \in (0, +\infty)$  astfel încât  $5[(x+y)^2 + \log_2^2 y] = [x + \log_2(2^y \cdot y^2)]^2$ ” și  $P_2$ : „ $(\exists)x \in \mathbb{R}$  și  $y \in (0, +\infty)$  astfel încât  $4^y = 4y(3x+4)$ ”.

a) Să se demonstreze că  $P_1$  este falsă.

b) Să se demonstreze că  $P_2$  este adevărată.

**Problema 3.** Se consideră  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ . Să se arate că:

a) dacă  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ,  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$  și  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ , atunci  $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ ;

b) dacă  $z_1, z_2, z_3$  sunt distincte două câte două și  $(z_1 + z_2)^3 = (z_2 + z_3)^3 = (z_3 + z_1)^3$ , atunci  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ .

**Problema 4.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1)$ ,  $f(n) = \left\{ 2^{n+\frac{1}{2}} \right\}$ , unde  $\{x\}$  este partea fracționară a numărului real

$x$ , demonstrați că:

a) funcția  $f$  este injectivă;

b) funcția  $f$  nu este surjectivă.

**SUCCES!**

*Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici*

**Baremul de notare este :** **Problema 1.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** a) 5 puncte; b) 2 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.