



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 21 FEBRUARIE 2016

**Clasa a XII-a**

**Problema 1.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit cu proprietatea că funcția  $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2$  este automorfism de grupuri. Arătați că mulțimea  $G$  are un număr impar de elemente.

**Problema 2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup care are elementul neutru  $e$  și mulțimea  $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, (\forall) x \in G\}$ . Demonstrați că dacă  $x^2 = e, (\forall) x \in G \setminus Z(G)$ , atunci grupul  $G$  este comutativ.

**Problema 3.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ . Dacă  $f(0) = 2016$  și  $f$  admite o primitivă  $F$  cu proprietatea  $f(x) = 2016 \cdot F(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$ , atunci calculați  $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$ .

**Problema 4.** Dacă  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă cu proprietatea că  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan^2 x) \cdot (1 + \tan^2 x) dx = 1$ , atunci să se calculeze  $\int_{-1}^1 \frac{f(x^2)}{e^x + 1} dx$ .

**SUCCESE!**

*Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici*

**Baremul de notare este :** **Problema 1.** 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** a) 7 puncte.