



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a V-a

Problema 1. Un număr natural se numește *util* dacă este pătrat perfect, cub perfect sau dacă este egal cu produsul dintre un număr care este pătrat perfect și un număr care este cub perfect (de exemplu numerele $4 = 2^2$, $27 = 3^3$ și $72 = 2^3 \cdot 3^2$ sunt numere *utile*).

- Găsește două numere *utile* cu proprietatea că diferența lor este egală cu 1.
- Găsește două numere *utile* cu proprietatea că diferența lor este egală cu 3.
- Demonstrează că oricare ar fi numărul *util* a există două numere *utile* b și c cu proprietatea $b - c = a$.

Soluție: a) $9 - 8 = 3^2 - 2^3 = 1$; (2p) b) $128 - 125 = 4^2 \cdot 2^3 - 5^3 = 3$; (2p); c) un numărul *util* este forma n^2 , m^3 sau $n^2 \cdot m^3$, unde $n, m \in \mathbb{N}$, \Rightarrow produsul oricăror două numere *utile* este un număr *util* (1p); dacă a este un număr *util* rezultă că $9a$ și $8a$ sunt numere *utile* (1p); $9a - 8a = a(9 - 8) = a$ (1p);

Problema 2. Un număr de 2465 de elevi din clasa a V - a din județul Călărași au completat un chestionar în care trebuiau să indice, în perspectiva evaluării naționale din clasa a VI - a, testul la care au nevoie de pregătire suplimentară, Matematică și Științe ale naturii sau/și Limbă și comunicare - Limba străină. La centralizarea rezultatelor s-a constatat că pentru Matematică și Științe ale naturii au fost 1528 de opțiuni, pentru Limbă și comunicare - Limba străină 1305 și 567 dintre elevii chestionați nu au indicat niciun test. Determină numărul elevilor care au indicat că au nevoie de pregătire la ambele teste.

Soluție: dacă x este numărul elevilor care au nevoie de pregătire la ambele teste, y este numărul elevilor care au nevoie de pregătire la matematică și z este numărul elevilor care au nevoie de pregătire la Limbă și comunicare rezultă: $x + y + z = 2465 - 567 = 1898$ (2p); $x + y = 1528$; $x + z = 1305$; $x = [(x + y) + (x + z)] - (x + y + z) = 935$ (5p)

Problema 3. Determină mulțimea A care este inclusă în \mathbb{N}^* și îndeplinește simultan condițiile:

- elementele mulțimii A sunt numere mai mici decât 13;
- dacă $x \in A$, atunci $x + 5 \in A$ sau $x : 3 \in A$. ($x : 3$ reprezintă „ x împărțit la 3”)

Soluție: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12\}$ (7p)

Problema 4. Dacă un număr natural îndeplinește simultan condițiile:

- nu conține cifre egale;
- prima și ultima cifră este număr prim sau pătrat perfect;
- numărul format din oricare două cifre consecutive este număr prim sau pătrat perfect.

atunci o să numim numărul *olimpic*. De exemplu numerele 79 (7, 79 sunt numere prime, $9 = 3^2$), 413 ($4 = 2^2$, 41, 13, 3 sunt numere prime), 2531 (2 este număr prim, $25 = 5^2$, 53, 31 sunt numere prime, $1 = 1^2$), 37164 (3, 37, 71 sunt numere prime, 16, 64, 4 sunt pătrate perfecte) sunt numere *olimpice*.

- Găsește cel mai mic număr *olimpic* de două cifre.
- Găsește cel mai mare număr *olimpic* de cinci cifre.
- Demonstrează că cel mai mare număr *olimpic* are opt cifre.

Soluție: a) 13; (2p) b) 97364; (2p); c) pentru că 8 nu este număr prim sau pătrat perfect și nici un număr prim sau pătrat perfect de două cifre distincte nu are a doua cifră 0 sau 8 rezultă că un număr *olimpic* nu poate conține cifrele 0 sau 8 (1p); există numere olimpice care au opt cifre, de exemplu 25316497 (2p);

Baremul de notare este: Problema 1. a) 2 punct; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** a) 2 punct; b) 2 puncte; c) 3 puncte.

Clasa a VI-a

Problema 1. Ana își pregătește în fiecare dimineață o băutură miraculoasă în felul următor: toarnă într-un vas gradat, care are capacitatea de 350 ml, 100 ml de miere de albine, după care toarnă 200 ml de ceai din plante de pădure, amestecă bine, apoi completează cu 50 ml dintr-un lichid care este ingredientul secret și amestecă din nou (*vezi desenul alăturat*). În această dimineață nu a fost atentă când a adăugat ceaiul și a turnat până s-a umplut vasul, dar fără să verse pe jos. Bună matematiciană, a calculat rapid ce cantitate trebuie să verse din amestec și care este cantitatea de miere care trebuie adăugată pentru ca, la final, după ce toarnă 50 ml din ingredientul secret să obțină băutura după rețeta stabilită, singura care are efect.

50 ml ingredient secret

200 ml ceai din
plante de pădure

100 ml miere de albine

a) Dacă băutura miraculoasă conține $p\%$ ingredient secret, arată că $14,2 < p < 14,3$.

b) Determină cantitatea de amestec care trebuie vărsată.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: a) $p = \frac{100}{7}$ (2p); $14,2 < p < 14,3 \Leftrightarrow 99,8 < 100 < 100,1$, adevărat (2p); b) raportul miere/ceai din

amestecul care trebuie vărsat este $\frac{100}{200 + 50} = \frac{2}{5}$ (1p); dacă x este cantitate de miere care se va arunca, atunci

$\frac{x}{50} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = 20$ ml (2p); cantitatea de amestecul care trebuie vărsată este $20 + 50 = 70$ ml (1p).

Problema 2. Într-o urnă sunt 20 de bile numerotate de la 1 la 20. Cristina extrage două bile și le dă câte o bilă prietenelor ei, Delia și Maria.

a) Ce număr ar trebui să primească Delia pentru ca acesta să aibă un singur divizor?

b) Ce număr ar trebui să primească Maria pentru ca acesta să aibă cinci divizori?

c) Cristina le spune celor două fete: "Numărul Deliei este mai mic decât numărul Mariei, dar ambele numere au același număr de divizori.". După ce se uită ce scrie pe bila ei Delia spune: "Nu știu numărul Mariei.", apoi Maria spune: "Cu informațiile date de Cristina, nu am știut numărul Deliei, dar acum îl știu.". Care sunt numerele scrise pe bilele primite de Cristina și Delia?

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: a) 1 (2p); b) 16 (2p); c) 1 și 16 nu sunt posibile; Există doar două numere care au 3 factori, care sunt 4 și 9. Dacă o fată deține numărul 4 sau 9, fetele pot ști imediat ce deține fiecare. Deci, 4 și 9 nu convin. Toate numerele prime au fiecare 2 factori. Să presupunem că atât Delia cât și Maria dețin două numere prime. Delia nu poate deține numărul 19 deoarece numărul Mariei este mai mare. Delia nu poate deține numărul 17, deoarece Delia poate ghici imediat numărul Mariei. După ce Delia spune "nu știu numărul Mariei", Maria știe că numărul Deliei este unul dintre numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13. Maria nu se poate concluziona ce număr are Delia. Astfel încât acestea nu dețin două numere prime. Sunt cinci numere cu 4 factori, care sunt 6, 8, 10, 14, 15. Prin același raționament, acestea nu sunt bune. Acum, au rămas doar 12, 18, și 20, care au fiecare 6 factori. Delia și Maria dețin două dintre ele. În cazul în care Delia deține numărul 18, ea poate spune imediat numărul Mariei. Nu este cazul.

Prin urmare, numărul Deliei este 12, iar numărul Mariei este 20. (4p)

Problema 3. Se consideră numărul natural 2016.

a) Găsește două numere prime p și q cu proprietate $2^p - 2^q = 2016$.

b) Demonstrați că orice mulțime care conține 2016 numere naturale, admite o submulțime care are suma elementelor divizibilă cu 2016.

Florin Marcu, Călărași

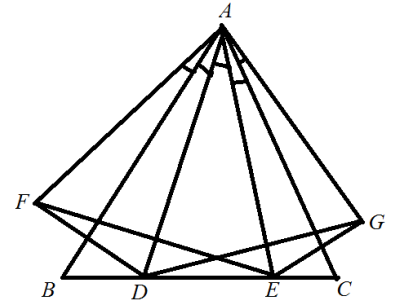
Soluție: a) $2^{11} - 2^5 = 2016$ (3p); b) fie $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}\}$ o mulțime 2016 elemente care sunt numere naturale; definim numerele $n_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, ($\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$), dacă printre aceste numere există unul divizibil cu 2016 afirmația este demonstrată (1p); dacă niciunul dintre numerele $n_1, n_2, \dots, n_{2016}$ nu este divizibil cu 2016 atunci ($\exists i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2016\}, i < j$ astfel încât $2016 \mid a_j - a_i$ (2p) \Rightarrow că submulțimea $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j\}$ are suma elementelor divizibilă cu 2016 (1p).

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC ascuțit unghic și punctele D, E astfel încât $D \in (BC)$, $E \in (DC)$, semidreapta (AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAE$ și semidreapta (AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$).

Dacă F este simetricul punctului D față dreapta AB și G este simetricul punctului E față dreapta AC , atunci demonstrați că $[EF] \equiv [DG]$.

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: dreapta AB este mediatoarea segmentului $[DF] \Rightarrow [AD] \equiv [AF]$ [5] și $m(\angle BAD) = m(\angle BAF)$ [1] (1p); semidreapta $(AD$ este bisectoarea unghiului $\angle BAE \Rightarrow m(\angle BAD) = m(\angle DAE)$ [2] (1p); semidreapta $(AE$ este bisectoarea unghiului $\angle DAC \Rightarrow m(\angle CAE) = m(\angle DAE)$ [3] (1p); dreapta AC este mediatoarea segmentului $[AE] \equiv [AG]$ [6] și $m(\angle EAC) = m(\angle CAG)$ [4] (1p); din [1], [2], [3] și [4] $\Rightarrow m(\angle EAF) = m(\angle DAG)$ [7] (1p); din [5], [6] și [7] \Rightarrow în $\triangle ADG \equiv \triangle AFE$ (1p) $\Rightarrow [EF] \equiv [DG]$ (1p).



Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : **Problema 1.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

Clasa a VII-a

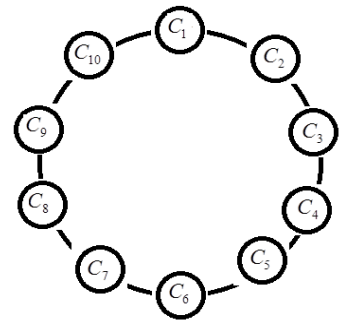
Problema 1. Fie a și b numere raționale pozitive. Arătați că:

- a) dacă $a\sqrt{7 \cdot 2016} + b \in \mathbb{Q}$, atunci $a = 0$;
b) $a\sqrt{2017 - 2\sqrt{2016}} - b\sqrt{2020 - 4\sqrt{2016}} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $a = b$;

Diana Stanciu, Ulmeni

Soluție: a) $\sqrt{7 \cdot 2016} = 84\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (1p); presupunem că $a \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals (2p) $\Rightarrow a = 0$ (1p); b) dacă $n = 2016 \Rightarrow a\sqrt{2017 - 2\sqrt{2016}} - b\sqrt{2020 - 4\sqrt{2016}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (a - b)\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ (2p); presupunem $a \neq b \Rightarrow 12\sqrt{14} \in \mathbb{Q}$, fals, deci $a = b$ (1p).

Problema 2. Fiecare din numerele 1, 2, 3, ..., 10 trebuie scris în unul din cercurile numite $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{10}$ (vezi desenul alăturat) astfel încât oricare ar fi cinci cercuri consecutive, suma numerelor scrise în aceste cercuri să fie un număr divizibil cu 5. Câte variante diferite de scriere a numerelor în cercuri există? (Două variante sunt diferite dacă în unul dintre cercurile $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{10}$ sunt scrise numere diferite)



Gabriela Ruse și Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: notăm cu a_i numărul scris în cercul $C_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$; din $5 | a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ și $5 | a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow 5 | a_6 - a_1$ (1p); asemănător rezultă $5 | a_7 - a_2, 5 | a_8 - a_3, 5 | a_9 - a_4$ și $5 | a_{10} - a_5$ (1p); pentru completarea cercurilor C_1, C_6 sunt 10 posibilități (1,6), (2,7), ..., (5,10), (6,1), ..., (10,5) (1p); dacă în cercurile C_1, C_5 este scrisă una din cel 10 variante pentru completarea cercurilor C_2, C_7 sunt 8 posibilități, ș.a.m.d. (2p); numărul variantelor diferite este $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ (2p).

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $D \in (AC), E \in (AB)$, astfel încât semidreapta $(BD$ este bisectoarea unghiului $\angle ABC$ iar semidreapta $(CE$ este bisectoarea unghiului $\angle ACB$.

Dacă paralela prin punctul D la dreapta CE intersectează dreapta AB în punctul F , paralela prin punctul E la dreapta BD intersectează dreapta AC în punctul G , $BD \cap CE = \{N\}$ și $DF \cap EG = \{P\}$, atunci:

- Demonstrați că $FG \parallel DE$ dacă și numai dacă $AB = AC$.
 - Dacă $AB = AC$, atunci demonstrați că patrulaterul $PDNE$ este romb.
 - Există un triunghi ABC astfel încât, în ipotezele date, rombul $PDNE$ este pătrat? (justifică răspunsul)
- Adrian Olaru, Călărași

Soluție:

a) Aplicând teorema bisectoarei, se obțin relațiile:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC} \quad (2)$$

(1 punct)

$$\text{În } \triangle ACE, DF \parallel CE; \text{ cf. T. Thales } \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AF}{EF} \quad (3)$$

$$\text{În } \triangle ABD, EG \parallel BD; \text{ cf. T. Thales } \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AG}{DG} \quad (4)$$

$$\text{Din (1) și (3) se obține } \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{EF} \quad (5)$$

$$\text{Din (2) și (4) se obține } \frac{AC}{BC} = \frac{AG}{DG} \quad (6)$$

$$\text{Dacă } FG \parallel DE, \text{ cf. T. Thales în } \triangle ADE \Rightarrow \frac{AF}{EF} = \frac{AG}{DG} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AB = AC. \quad (1 \text{ punct})$$

$$\text{Reciproc, dacă } AB = AC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AF}{EF} = \frac{AG}{DG}; \text{ cf. reciprocei teoremei lui Thales în } \triangle ADE \Rightarrow$$

$FG \parallel DE. \quad (1 \text{ punct})$

b) $ND \parallel EP$ și $NE \parallel DP$, deci $PDNE$ este paralelogram. (1 punct)

Dacă $AB = AC$, $\triangle ABC$ este isoscel și $BD = CE$. $\angle NBC \equiv \angle NCB \Rightarrow \triangle NBC$ este isoscel $\Rightarrow NB = NC$

$\Rightarrow BD - NB = CE - NC \Rightarrow ND = NE \Rightarrow PDNE$ este romb. (1 punct)

c) Dacă $PDNE$ ar fi pătrat, atunci $m(\angle END) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle BNC) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle NBC) = m(\angle NCB) = 45^\circ, (1 \text{ punct}) \Rightarrow m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = 90^\circ$; imposibil (1 punct).

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și punctul $D \in (BC)$, astfel încât semidreapta (AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$). Dacă paralela prin punctul B la dreapta AD intersectează paralela prin punctul A la dreapta BC în punctul M , $N \in (BC \setminus (BC))$ este punctul cu proprietatea $[BD] \equiv [CN]$ și punctul P este simetricul punctului A față de punctul D , atunci:

- demonstrați că patrulaterul $AMCN$ este paralelogram;
- $AD = BC \Leftrightarrow CM \perp NP$.

Stelică Pană, Chirnogi și Sorin Furtună, Călărași

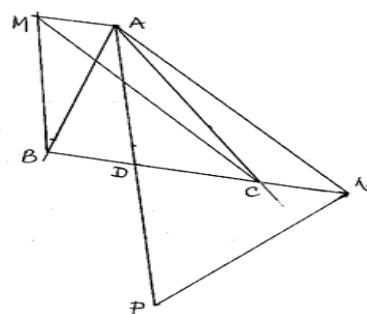
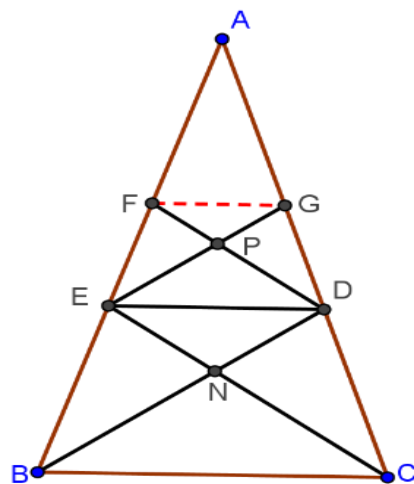
Soluție: a) $ADBM$ paralelogram (1 punct); $AM \parallel CN$ și

$AM = CN \Rightarrow AMCN$ paralelogram (1 punct); b) (\rightarrow) din a) rezultă

$CM \parallel AN$ (i) (1p); $AD = DN = DP \Rightarrow AN \perp NP$ (ii) (1p); din (i) și

(ii) $\Rightarrow CM \perp NP$ (1p); (\leftarrow) $CM \perp NP \Rightarrow AN \perp NP$ (1p);

$\triangle ANP$ dreptunghic $\Rightarrow ND = AD \Rightarrow AD = BC$ (1p).



Baremul de notare este : **Problema 1.** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte; **Problema 4.** a) 2 puncte; b) 5 puncte.

Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră ecuațiile:

$$1^\circ \|x - 2016| - |x - 1| = 2015;$$

$$2^\circ \left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor.$$

unde cu $|x|$ și cu $\lfloor x \rfloor$ s-au notat modulul și, respectiv partea întreagă a numărului real x .

- Arătați că $x = 0$ este soluție pentru ecuația 1° .
- Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația 1° .
- Câte numere naturale sunt soluții pentru ecuația 2° ?

Marin Neață și Eugen Predoiu, Călărași

Soluție: a) $\| -2016| - |-1| = |2016 - 1| = 2015$ (1p); b) $x \in (-\infty, 1] \cup [2016, +\infty) \Rightarrow \|x - 2016| - |x - 1| = 2015 \Leftrightarrow 2015 = 2015 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2016, +\infty)$ soluție (1p); $x \in (1, 2016) \Rightarrow \|x - 2016| - |x - 1| = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \notin (1, 2016)$ sau $x = 2016 \notin (1, 2016)$ (2p); c) $\left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$, $\left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow x \in \{10, 11, \dots, 17\}$ ș.a.m.d. $\left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = 8 \Leftrightarrow x \in \{80\}$ (2p); $(\forall) x \in \mathbb{N}, x \geq 81 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = 1$ (1p); ecuația are $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ soluții numere naturale (1p).

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că:

- Dacă $ab + bc + ca = 1$ atunci $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = (abc - a - b - c)^2$.
- Dacă a și b sunt numere pozitive atunci $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
- Dacă numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci $\left(\frac{b}{a} - \frac{c}{a} + 1\right)\left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c} + 1\right) \leq 1$.

Cristina Bornea, Călărași

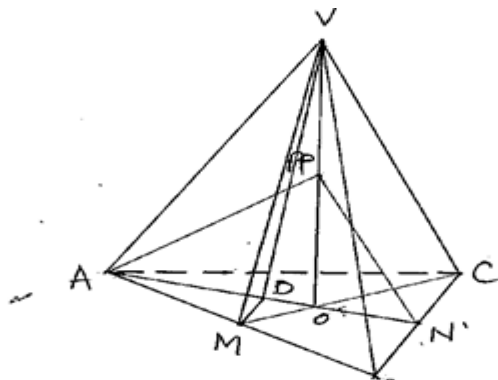
Soluție: a) $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = (abc)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 + (ab + bc + ca)^2 - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) =$ (1p); $(abc)^2 - 2abc(a + b + c) + (a + b + c)^2 = (abc - a - b - c)^2$ (1p); b) $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0$, adevărat (1p); c) $abc > 0 \Rightarrow \left(\frac{b}{a} - \frac{c}{a} + 1\right)\left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c} + 1\right) \leq 1 \Leftrightarrow (b - c + a)(c - a + b)(a - b + c) \leq abc$ (1p); a, b, c lungimile laturilor unui triunghi $\Rightarrow a + b - c = x > 0, a + c - b = y > 0, b + c - a = z > 0 \Rightarrow a = \frac{x + y}{2}$, $\Rightarrow a + b - c = x > 0, a + c - b = y > 0, b + c - a = z > 0 \Rightarrow a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{x + z}{2}, c = \frac{y + z}{2}$ (1p); $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $\frac{x + z}{2} \geq 2\sqrt{xz}, \frac{y + z}{2} \geq 2\sqrt{yz}$ (1p); $\frac{x + y}{2} \frac{x + z}{2} \frac{y + z}{2} \geq xyz$ (1p).

Problema 3. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$. Dacă $VA = 4a$ cm, $a \in (0, +\infty)$, $VO \perp (ABC)$; $O \in (ABC)$, M, N și P sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și, respectiv $[VO]$, atunci:

- calculați volumul tetraedrului regulat $VABC$;
- determinați lungimea proiecției segmentului $[VM]$ pe planul (ANP) .

Stelică Pană, Chirnovi și Sorin Furtună, Călărași

Indicatii:



Dacă D este piciorul B perpendicularei din M pe AN , atunci $MD \perp VO$ și $MD \perp AN \Rightarrow MD \perp (VAN)$.

Cum $V \in (ANP) \Rightarrow VD$ este proiecția lui VM pe planul (ANP) .

$$VO = \frac{a\sqrt{6}}{3}; DO = \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12} \text{ și avem}$$

$$VD^2 = VO^2 + DO^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{3a^2}{144} = \frac{99a^2}{144} = \frac{a^2 \cdot 11}{16}$$

$$\Rightarrow VD = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

Problema 4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și un punct M care aparține interiorului triunghiului BCD . Paralele duse prin M la dreptele AB , AC și AD intersectează planele (ACD) , (ABD) și, respectiv (ABC) în punctele A' , B' și, respectiv C' . Dacă $AA' \cap (CD) = \{P\}$, $AB' \cap (BD) = \{Q\}$, $AC' \cap (BC) = \{M\}$ și $(BCD) \parallel (A'B'C')$, atunci:

a) demonstrați că $\frac{A'P}{AP} = \frac{B'Q}{AQ} = \frac{C'N}{AN}$;

b) demonstrați că M este centrul de greutate al triunghiului (BCD) .

(G.M.)

Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct; b) 3 puncte; b) 3 puncte; Problema 2. a) 2 puncte; b) 1 punct; b) 4 puncte; Problema 3. a) 3 puncte; b) 4 puncte; Problema 4. a) 3 puncte; b) 4 puncte.