

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016

CLASA A XII- A

Subiectul I

Fie în $M_3(\mathbb{R})$ matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și pentru fiecare $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ definim matricea

$$M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B.$$

1. Să se arate că mulțimea de matrice $G = \{M_t | t \in \mathbb{R}/\{0\}\}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.
2. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow G, f(t) = M_t$ este un izomorfism de grupuri.

Subiectul II

Fie (G, \cdot) și $a, b \in G$ diferite cu proprietățile $a \neq e, b \neq e, a^7 = e, aba^{-1} = b^2$ unde e este elementul neutru al grupului G . Să se determine ordinele elementelor a și b .

Subiectul III

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} k + \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ și

$$J_n = \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] \cdot f(x) dx, \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \text{ Determinați } k \text{ astfel încât } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 12.$$

Subiectul IV

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $e^{f(x)} + f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\int_1^{e+1} f(x) dx \leq \frac{3}{2}$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.