



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016

Clasa a XI-a

SUBIECTUL I: Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 4x+1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

a. Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 4xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$

b. Determinați $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A(m) \cdot A(n) = A(-1)$

c. Există matricea $X \in M_3(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot X^T = A(-\frac{1}{2})$?

Dana Paponiu

SUBIECTUL II: Să se calculeze limitele:

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n}{3^n \cdot n!}, \quad b. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{e^k}$$

Claudia Nănuți, Dan Nănuți

SUBIECTUL III: Fie $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ care comută oricare două câte două și
 $A + B + C + D = 0_n$

Să se arate că: $\det(BC - AD) \det(CA - BD) \det(BA - CD) \geq 0$

Nicolae Mușuroia

SUBIECTUL IV: Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, pentru care

$$(x_n - 1)^2 \leq 2x_{n+1} - 3 < 2x_n + 4, \forall n \geq 1$$

Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.

Dan Nedeianu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.