

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15 Februarie 2023

clasa a 12-a

1. a) Pe $G_1 = G_2 = (-1, 1)$ definim operațiile binare " $*$ ", respectiv " \circ " prin

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \quad \text{pentru orice } x, y \in G_1,$$

respectiv

$$x \circ y = \left(\frac{{}^{2023}\sqrt{x} + {}^{2023}\sqrt{y}}{1 + {}^{2023}\sqrt{xy}} \right)^{2023}, \quad \text{pentru orice } x, y \in G_2.$$

- a) Arătați că $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) sunt grupuri abeliene.
b) Stabiliți un izomorfism între cele două grupuri de mai sus.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & , \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Demonstrați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

3. Fie $m \in \mathbb{R}$ un parametru real și considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) & , \text{dacă } x \geq -\sqrt{3}, \\ x + m - \frac{\pi}{3} & , \text{dacă } x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

- a) Determinați mulțimea valorilor parametrului real pentru care funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
b) Determinați mulțimea primitivelor funcției f pe intervalul $[-\sqrt{3}, \infty)$.

4. Fie (S, \cdot) un semigrup cu proprietatea că $x^3 = x$ și $x^2y^2 = y^2x^2$ pentru orice $x, y \in S$. Arătați că semigrupul (S, \cdot) este comutativ.

(Un semigrup (S, \cdot) este o structură algebrică formată dintr-o submulțime nevidă S și o operație binară asociativă " \cdot " definită pe S .)

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte.