

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 18 februarie 2023
Clasa a VII- a

Barem de corectare și notare

1. Se consideră numărul

$$A = [\sqrt{1 \cdot 3}] + [\sqrt{2 \cdot 4}] + [\sqrt{3 \cdot 5}] + \dots + [\sqrt{n(n+2)}]$$

unde n este număr natural nenul.

a) Calculați valoarea lui A pentru $n = 2023$.

b) Determinați numărul natural n știind că $A = 55$.

Soluție:

$$n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow$$

$$n < \sqrt{n(n+2)} < n+1 \Rightarrow$$

$$[\sqrt{n(n+2)}] = n \Rightarrow$$

$$A = 1 + 2 + \dots + n$$

$$A = \frac{n(n+1)}{2}$$

3p

$$n = 2023 \Rightarrow A = 2047276$$

2p

$$b) \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n+1) = 110 \Rightarrow n = 10$$

2p

2. a) Demonstrați că

$$\sqrt{\frac{1+3+5+\dots+2023}{1+3+5+\dots+1011}} = 2.$$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația

$$x^2 \cdot \sqrt{(y-1)^2} = 2023.$$

Soluție:

$$a) 1+3+5+\dots+2023 = 1012^2$$

1p

$$1+3+5+\dots+1011 = 506^2$$

1p

$$\sqrt{\frac{1+3+5+\dots+2023}{1+3+5+\dots+1011}} = \sqrt{\frac{1012^2}{506^2}} = \sqrt{2^2} = 2$$

1p

$$b) x^2 \cdot |y-1| = 7 \cdot 17^2 \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 17\}$$

1p

$$x = \pm 1 \Rightarrow |y-1| = 2023 \Rightarrow y \in \{-2022; 2024\}$$

1p

$$x = \pm 17 \Rightarrow |y-1| = 7 \Rightarrow y \in \{-6, 8\}$$

1p

$$S = \{(-1; -2022); (-1; 2024); (1; -2022); (1; 2024); (-17; -6); (-17; 8);$$

$$(17; -6); (17; 8)\}$$

1p

3. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează latura AC în punctul D . Fie M mijlocul laturii BC și E simetricul punctului D față de M . Arătați că:

a) patrulaterul $BDCE$ este romb;

b) $AM \perp CE$.

Soluție:

a) $BDCE$ paralelogram

2p

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 30^\circ \Rightarrow \triangle BDC \text{ isoscel} \Rightarrow BDCE \text{ romb.}$$

2p

$$b) \left. \begin{matrix} \triangle ABC, \sphericalangle A = 90^\circ \\ \sphericalangle C = 30^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} AB = \frac{BC}{2} \\ BM = \frac{BC}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \text{ isoscel} \Rightarrow \left. \begin{matrix} BD \perp AM \\ BD \parallel EC \end{matrix} \right\} \Rightarrow AM \perp EC$$

3p

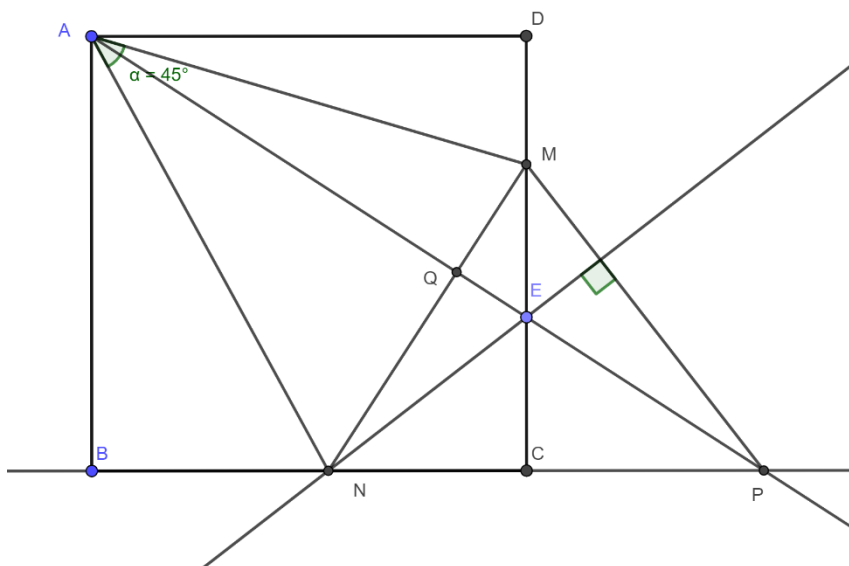
4. Fie E un punct pe latura DC a pătratului $ABCD$, $[AN$ bisectoarea unghiului $\angle EAB$, $N \in BC$ și P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC . Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M .

Demonstrați că:

- $[NA$ este bisectoarea unghiului $\angle MNB$;
- $MN = DM + BN$;
- $\angle MAN = 45^\circ$.

(Gazeta Matematică nr.10/2022)

Soluție:



- a) În $\triangle MNP$, E este ortocentru $\Rightarrow PE \perp MN$

1p

N este pe bisectoarea $\angle EAB \Rightarrow d(N, AB) = d(N, AE)$

Notăm $NM \cap AP = \{Q\} \Rightarrow NQ = NB$

$\triangle ANQ \equiv \triangle ANB$ (IC) $\Rightarrow \angle ANB \equiv \angle ANQ$

2p

- b) Din a) $\Rightarrow AQ = AB \Rightarrow \triangle AMQ \equiv \triangle AMD$ (IC)

$\left. \begin{matrix} DM = MQ \\ BN = NQ \end{matrix} \right\} \Rightarrow MN = MQ + NQ = DM + NB$

2p

- c) $\angle MAN = \angle MAQ + \angle NAQ = \frac{\angle QAD}{2} + \frac{\angle QAB}{2} = \frac{\angle DAB}{2} = 45^\circ$

2p