

**Olimpiada de Matematică–Etapa Locală  
Maramureș – 18 februarie 2023  
Clasa a VIII - a**

1. a) Arătați că pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ , are loc egalitatea:

$$9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 68 = (3a - 2)^2 + (3b - 8)^2.$$

- b) Numerele reale  $a, b, x, y$  satisfac relația:

$$\sqrt{9a^2 + 9b^2 - 12a - 48b + 72} + \sqrt{25x^2 + 4y^2 - 20x - 20y + 45} \leq 6.$$

Calculați media aritmetică a mediilor geometrice ale numerelor  $a$  și  $b$ , respectiv  $x$  și  $y$ .

2. a) Pentru  $x$  număr real, descompuneți expresia  $x^4 + x^2 + 1$  în produs de doi factori de gradul al doilea.

- b) Determinați toate numerele întregi  $k$ , pentru care  $k^4 + k^2 + 1$  este număr prim.

3. Fie  $ABCD$  un tetraedru regulat și  $M \in (AC)$ .

- a) Dacă  $M$  este mijlocul lui  $(AC)$ , calculați  $\cos(\angle(BM, CD))$ .

- b) Arătați că, pentru orice  $M \in (AC)$ , raportul  $\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)}$  are aceeași valoare.

*(Gazeta Matematică 11/2022 – Traian Preda, București)*

4. Fie  $ABCD$  un tetraedru cu muchiile  $AD$  și  $BC$  egale și ambele perpendiculare pe  $CD$ . De asemenea, fie  $M$  mijlocul muchiei  $AB$  și  $N$  piciorul perpendicularei din  $M$  pe  $CD$ .

- a) Arătați că  $AC = BD$ .

- b) Demonstrați că  $MN \perp AB$ .

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.*

*Timp de lucru - 3 ore*