

**Olimpiada de Matematică – Etapa Locală**  
**Maramureș – 18 februarie 2023**  
**Clasa a XI- a**

1. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  și  $C = A \cdot B - B \cdot A$ , astfel încât  $\det(C) = -4$ .

a) Aflați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $C^2 = a \cdot I_2$ .

b) Calculați  $\det(-2I_2 + C)$  și  $\det(I_2 - C^{2022})$ .

2. Fie matricele  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^2 + B^2 = (2 + \sqrt{3})(A \cdot B - B \cdot A)$ .

Dacă  $\det(A^2 + B^2) \neq 0$ , demonstrați că  $n$  se divide cu 12.

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale astfel încât  $a_1 > 0$  și

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

b) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$ .

*Suplimentul Gazeta Matematică 10/2022*

4. Considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , cu termenul general

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad n \geq 1.$$

a) Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit.

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{x_{n+1}} - e^{x_n})$  știind că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$ .

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.*

*Timp de lucru - 3 ore*