



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

- a) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul $x = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ este divizibil cu 2023.
- b) Aflați numerele prime a, b și c , dacă $a^3 + 3b + 3^c = 303$.

Soluție:

- a) $x = (n + 1)^2$ și $2023 = 7 \cdot 17^2$ 1p
Cel mai mic $n \in \mathbb{N}$ pentru care $(n + 1)^2 : 2023$ se obține dacă $n + 1 = 7 \cdot 17$, deci $n = 118$ 1p
- b) Observăm că $a^3 : 3$, dar a este prim, deci $a = 3$ 1p
Prin înlocuire avem $3b + 3^c = 276$, de unde $b + 3^{c-1} = 92$ 1p
Din $3^{c-1} < 92 \Rightarrow c \leq 5$, cu c prim, deci $c \in \{2, 3, 5\}$ 1p
Se obțin soluțiile $(3, 89, 2), (3, 83, 3)$ și $(3, 11, 5)$ 2p

Problema 2.

Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{ \overline{abcd} \mid \frac{a-3}{b} = \frac{b+2}{c} = \frac{c+2}{d} = \frac{d-1}{a} \right\}$.

Soluție:

$$\frac{a-3}{b} = \frac{b+2}{c} = \frac{c+2}{d} = \frac{d-1}{a} = \frac{a-3+b+2+c+2+d-1}{b+c+d+a} = 1 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$0 < b < c = b+2 < a = b+3 < d = b+4 \leq 9 \text{ deci } b \text{ poate lua exact 5 valori (1, 2, 3, 4, 5)} \quad \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{card}(A) = 5 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3.

Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, (OM bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, (ON bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOB$, iar (OP bisectoarea unghiului $\sphericalangle AON$. Știind că $OP \perp OC$ și $7 \cdot \sphericalangle BOC = 10 \cdot \sphericalangle MOP$, aflați măsura unghiului BOC .

Supliment Gazeta Matematică nr.10/2022

Soluție:

- Fie $\sphericalangle MON = \sphericalangle NOB = x$ (în grade). Atunci $\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = 2x$, deci $\sphericalangle AON = 3x$ 1p
- Din $\sphericalangle AOP = \sphericalangle PON = \frac{3x}{2}$ avem $\sphericalangle POC = \sphericalangle PON + \sphericalangle NOB + \sphericalangle BOC = \frac{5x}{2} + \sphericalangle BOC$ 1p
- $7 \cdot \sphericalangle BOC = 10 \cdot \sphericalangle MOP$ implică $\sphericalangle BOC = \frac{10}{7} \left(2x - \frac{3x}{2} \right) = \frac{5x}{7}$ 2p
- Din $\sphericalangle POC = 90^\circ$ obținem $x = 28^\circ$ 2p
- $\sphericalangle BOC = 20^\circ$ 1p



Problema 4.

Fie punctele coliniare A, B, C, D , în această ordine, astfel încât $AB = 5^x$ m, $BC = 2 \cdot 5^{x+1}$ m, iar $CD = 32 \cdot 5^x$ m.

a) Arătați că $2 \cdot AB + 3 \cdot BC = CD$.

b) Dacă M este mijlocul lui BC , iar N este pe CD astfel încât $2 \cdot CN = 3 \cdot ND$ și $MN = 605$ m, determinați lungimea segmentului AD .

Soluție:

a) $2 \cdot AB + 3 \cdot BC = 2 \cdot 5^x + 6 \cdot 5^{x+1} = 32 \cdot 5^x = CD$ 2p

b) $2 \cdot CN = 3 \cdot ND \Leftrightarrow 5 \cdot CN = 3 \cdot (CN + ND) \Leftrightarrow 5 \cdot CN = 3 \cdot CD$, de unde se obține

$$CN = \frac{3}{5} \cdot 32 \cdot 5^x = 96 \cdot 5^{x-1} \text{ m} \dots\dots\dots 1p$$

$$MC = BC : 2 = 5^{x+1} \text{ m} \dots\dots\dots 1p$$

$$MN = MC + CN = 121 \cdot 5^{x-1} \text{ m} \dots\dots\dots 1p$$

$$MN = 605 \Rightarrow 5^{x-1} = 5, \text{ deci } x = 2, \text{ rezultă } AD = AB + BC + CD = 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 32 \cdot 5^2 = 1075 \text{ m} \dots\dots 2p$$