

**Olimpiada Națională de Matematică 2023****Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023****Clasa a VIII-a**

**Problema 1.** Determinați cea mai mică valoare a numărului real  $x$  având proprietatea că există un număr real  $y$  astfel încât  $4x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ .

**Problema 2.** Se consideră patru puncte necoplanare  $A, B, C$  și  $D$  astfel încât  $AC=BC$ , iar planele  $(ABC)$  și  $(ABD)$  sunt perpendiculare. Dacă  $BD=CM$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AD$ , determinați măsura unghiului dintre dreptele  $BD$  și  $CM$ .

*Supliment Gazeta Matematică 10/2022*

**Problema 3.** Fie  $VABC$  o piramidă triunghiulară regulată. Notăm cu  $O$  centrul bazei  $ABC$ , cu  $M$  mijlocul muchiei  $AB$  și cu  $S, T$  proiecțiile punctului  $O$  pe planele  $(VAB)$ , respectiv  $(VBC)$ .

- a) Arătați că punctul  $S$  aparține dreptei  $VM$ .
- b) Demonstrați că dreptele  $ST$  și  $VB$  sunt perpendiculare.
- c) Apotema bazei este  $OM = 12$  cm, iar apotema piramidei este  $VM = 20$  cm. Determinați lungimea proiecției segmentului  $ST$  pe planul  $(ABC)$ .

**Problema 4.** Fie  $x, y$  și  $z$  trei numere reale din intervalul  $[0, 2]$  astfel încât

$$xyz = (2-x)(2-y)(2-z).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele  $x(2-y)$ ,  $y(2-z)$  și  $z(2-x)$  este mai mare sau egal cu 1.

*Timp de lucru: 3 ore*

*Fiecare problemă este notată cu 7p*