



Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală - Iași, 10 februarie 2023

Clasa a IX -a

Problema 1. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \left\{ \left\{ \frac{n^2}{5} \right\} + \left\{ \frac{n^2}{7} \right\} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2022

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2023| = 2024(x-2022).$$

Problema 3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+a^2+b^2}} \leq 1 \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+2bc}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+2ca}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+2ab}}.$$

Problema 4. Se consideră triunghiul oarecare ABC cu centrul de greutate G , $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, B_1 este piciorul bisectoarei din B , iar C_1 este piciorul bisectoarei din C .

a) Demonstrați că $\overrightarrow{GB_1} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Arătați că dacă $a \neq 2b$, $a \neq 2c$, atunci B_1, G, C_1 sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte