



**A 73-a Olimpiadă Națională de Matematică**  
**Etapă zonală, 11 februarie 2023**  
**Clasa a IX-a**

**Problema 1.**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2021x - 2019 = \{x\}^2 + 2023\{x\},$$

unde  $\{x\}$  este partea fracționară numărului real  $x$ .

**Problema 2.**

Arătați că pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

**Problema 3.**

Fie numerele reale  $x > 0$  și  $y > 0$ . În triunghiul  $ABC$  punctele  $D$  și  $E$  se află pe laturile  $AB$  respectiv  $AC$ , astfel încât  $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{x}$  și  $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{y}$ . Fie punctul  $F$  pe segmentul  $DE$ , astfel încât  $\frac{DF}{EF} = y + 1$  și fie  $\{G\} = AF \cap BC$ . Arătați că  $BG > CG$ .

**Problema 4.**

Demonstrați că ecuația  $x^2 + px + q = 0$  nu are soluții raționale dacă  $p$  și  $q$  sunt numere întregi impare.

*Gazeta Matematică*

*Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!*

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.*