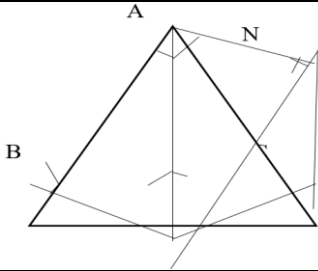


Olimpiada națională de matematică
etapa locală, 11.02.2023
Clasa a VII-a

Problema 1		7puncte
a)	$2\sqrt{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$ $ 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = \sqrt{12} - \sqrt{18} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ $a = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$ $a = -\sqrt{2} < 0$	1p 1p 1p
b)	$ 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = \sqrt{27} - \sqrt{32} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ $b = 2(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - 3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) + 1$ $b = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 1$ $b = -\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$	1p 1p 1p
c)	$(a - b)^{2023} = [-\sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})]^{2023} = (-\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^{2023}$ $a = (-1)^{2023} = -1$	1p
Problema 2		7puncte
	$\frac{8.1}{1^2 \cdot 3^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}$ $\frac{8.2}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}$ $\frac{8.3}{5^2 \cdot 7^2} = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}$ <p>.....</p> $\frac{8n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} =$ $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} < 1$	1p 1p 1p 1p 1p 1p
Problema 3		7puncte
a)		2p
b)	$MB \perp AB \text{ si } NA \perp AB \Rightarrow MB \parallel AN$ $MN \parallel AB$	$\Rightarrow ABMN = \text{dreptunghi}$ 1p

	$ABMN = \text{dreptunghi} \Rightarrow AB = MN$ $\Rightarrow MN = AC \quad (1)$ $AB = AC$ $AB \parallel MN$ și AM secantă, avem $\angle BAM \equiv \angle AMN$ (alterne interne) $\Rightarrow \triangle AOM - \text{triunghi isoscel} \Rightarrow [AO] \equiv [MO]$ și $\angle AMO = \angle MAO = \frac{\angle A}{2} \quad (2)$ $\triangle ANO \equiv \triangle MCO$ și $\angle ANO \equiv \angle ACM$ (unghiuri drepte); $AO = MO$ și $\angle AON \equiv \angle COM$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \triangle ANO \equiv \triangle MCO \Rightarrow AN = CM$ și $ON = OC$ $\Rightarrow \triangle ONC$ isoscel de bază $NC \Rightarrow \angle OCN \equiv \angle ONC = \frac{\angle A}{2} \quad (3)$ Din (1), (2), (3) și AC secant pentru dreptele AM și $CN \Rightarrow AM \parallel CN$ $\Rightarrow ANCM - \text{trapez isoscel}$	1p 1p
c)	$ANCM - \text{trapez isoscel} \Rightarrow AM \parallel NC$ $AM \perp BC \Rightarrow CN \perp BC$	2p
Problema 4		7 puncte
Desen		1p
a)	$\triangle AEH \equiv \triangle BEF \equiv \triangle FCG \equiv \triangle GDH$ (c.c) de unde rezultă $EH = EF = FG = GH$ Cum triunghiurile de mai sus sunt dreptunghice isoscele obținem că $\angle HEF = 90^\circ$. Dar HE, EF, FG, GH sunt linii mijlocii în triunghiurile QPT, QPR, QRS, QTS $\Rightarrow PT = PR = RS = ST \quad (1)$	2p
	Unghiul TPR are laturile paralele cu ale unghiului HEF si deci $\angle TPR = 90^\circ \quad (2)$ Din (1) și (2) rezultă că $PRST$ este un romb cu un unghi de 90° , deci un pătrat. Fie Q' centrul său. Avem atunci că $Q'P = Q'R = Q'S = Q'T$, deci P, R, S, T sunt pe un cerc $C(Q', R = Q'P)$	1p
b)	Trebuie demonstrată coliniaritatea punctelor Q, O, Q' . Fie $QO \cap PS = \{Q''\}$ EG este linie mijlocie în trunghiul $QPS \Rightarrow EO \parallel PS$ iar în triunghiul QPQ'' avem	2p

	$EO \parallel PQ''$ și E mijlocul lui QP și obținem astfel că EO este linie mijlocie în triunghiul QPQ'' . Cum $EO = \frac{1}{2}PS = PQ''$ rezultă că Q'' este mijlocul lui PS și deci $Q'' = Q'$. Așadar Q, O, Q' sunt coliniare.	
	Cum EO este linie mijlocie în triunghiul $QPQ' \Rightarrow QO = OQ'$. Deci Q' este simetricul lui Q față de O .	1p

Notă: Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.