

**Olimpiada Națională de Matematică 2024**  
**Etapă locală - Teleorman, 11 februarie 2024**  
**Clasa a XII -a**  
**Subiecte**

**Problema 1. (7p)**

Pe mulțimea  $(0, +\infty)$  se consideră legea de compoziție internă, notată „ $*$ ”, având proprietățile:  $(x + 1) * x = 1, \forall x \in (0, +\infty)$  și  $(x \cdot y) * z = x \cdot (y * z), \forall x, y, z \in (0, +\infty)$ . Să se calculeze  $\sqrt{2} * (\sqrt{2} + 1)$  și să studieze asociativitatea și existența elementului neutru pentru legea „ $*$ ”.

**Problema 2. (7p)**

Fie  $G = (-1, 1)$ . Pentru orice  $x, y \in G$ , notăm  $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$ .

a) Arătați că  $(G, \circ)$  este grup abelian și este izomorf cu grupul  $((0, +\infty), \cdot)$ .

b) Calculați  $\frac{1}{3} \circ \frac{1}{5} \circ \frac{1}{7} \circ \dots \circ \frac{1}{2025}$ .

**Problema 3. (7p)**

Pe un interval  $I$  din domeniul maxim de definiție să se calculeze o primitivă pentru funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x$ .

**Problema 4. (7p)**

Calculați:

$$I = \int_0^{10} \frac{(5-x)^1 + (5-x)^3 + (5-x)^5 + \dots + (5-x)^{2023}}{1 + (5-x)^2 + (5-x)^4 + \dots + (5-x)^{2024}} dx.$$

**Notă:** Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Nu se acordă puncte din oficiu.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.