

Barem de corectare CMAA 2024 Clasa a XII-a - Științele naturii

P1

a) $\int \left(\frac{x^2}{4} f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) \right) dx = \int \frac{x^2 \ln 4}{4(x^2 + 4)} dx$	2p
$= \frac{\ln 4}{4} \int \frac{x^2 + 4 - 4}{x^2 + 4} dx = \frac{\ln 4}{4} \left(x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C$	1p
b) Notând $t = \frac{4}{x} \Rightarrow dx = -\frac{4}{t^2} dt \Rightarrow I = \int_1^4 \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \int_1^4 \frac{\ln 4 - \ln t}{t^2 + 4} dt = \frac{\ln 4}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big _1^4 - I$	2p
$I = \frac{\ln 4}{4} \cdot \left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)$	2p

P2

a) Ca funcția f să fie izomorfism trebuie să fie bijectivă și morfism	1p
Atunci $a \neq 0$ și $f(x + y) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in R$.	2p
Se obțin $a \in R \setminus \{0\}$ și $b = -1$	1p
b) $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + n - 1$ pentru oricare $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$	1p
$2 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^{2024} = 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024} + 2023 = 2^{2025} + 2021$	2p

P3 Manual-adaptare

Relația din enunț definește pe $(0, \infty)$ legea de compoziție $R = R_i \circ R_j = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}$	2p
Rezistența totală a primului circuit este dată de $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \circ R_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$	2p
Rezistența totală a celui de al doilea circuit este dată de $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$	2p
Legea de compoziție este asociativă, deci circuitele au aceeași rezistență totală.	1p

P4– GM 11/2023

Făcând substituția $x = 1 - t$ se obține $I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx = \int_0^1 \frac{\sin(\pi - \pi t)}{1 + e^{-(2t-1)}} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1 + e^{2t-1}} \cdot e^{2t-1} dt$	3p
Prin adunarea celor două integrale se obține $2I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)(1 + e^{2x-1})}{1 + e^{2x-1}} dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big _0^1 = \frac{2}{\pi}$	3p
$I = \frac{1}{\pi}$	1p