

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024
Clasa a IX-a

1. Se consideră expresia: $E(n) = \left[\sqrt{3n+1} \right] - \left[\sqrt{3n+2} \right]$, $n \in \mathbb{N}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) (2p) Calculați $E(2024)$.

b) (5p) Arătați că expresia $E(n)$ nu depinde de n .

2. a) (4p) Arătați că numărul $a = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ ori}} \underbrace{22\dots2}_{n+1 \text{ ori}} 5$ este pătrat perfect.

b) (3p) Există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^4 = a$?

3. (7p) Demonstrați că următoarele propoziții sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

P₁: $(1+x)^n \geq 1+nx$, pentru orice $x \in (-1; +\infty)$.

P₂: $\left(\frac{5}{2}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^n \geq 2 + \frac{9n}{4}$.

4. (7p) Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și M un punct mobil pe cercul său circumscris. Arătați că punctul P , definit de relația $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, se mișcă pe un cerc.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.