

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024
Clasa a XI-a

1. (7p) Se consideră determinantul de ordinul 3, $D(n) = \begin{vmatrix} n^2 + 1 & n^4 + 1 & 17 \\ n^2 + n & n^4 + n^2 & 20 \\ n^2 & n^4 & 16 \end{vmatrix}$. Arătați că pentru orice n întreg și par, $D(n)$ este divizibil cu 384.
2. Determinați valoarea limitelor:
- a. (3p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- b. (4p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \cdot \sin 2x \cdot \dots \cdot \sin nx}{x^{n+2}}$
3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$.
- a) (4p) Arătați că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_3$.
- b) (3p) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.
4. Notăția $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .
- a) (4p) Arătați că dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este un șir convergent, cu limita $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \{a\}$.
- b) (3p) Ce puteți afirma despre limita șirului $(\{a_n\})_{n \geq 1}$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{Z}$?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.