

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 10.02.2024

Filiera teoretică - Științele naturii

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 4}$ .

a) (3p) Calculați  $\int \left( \frac{x^2}{4} f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) \right) dx$ .

b) (4p) Calculați  $\int_1^4 f(x) dx$ .

2. Se consideră grupul  $(R, \circ)$  unde  $x \circ y = x + y + 1$ .

a) (4p) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care funcția  $f : R \rightarrow R, f(x) = ax + b$  este un izomorfism între grupurile  $(R, +)$  și  $(R, \circ)$ .

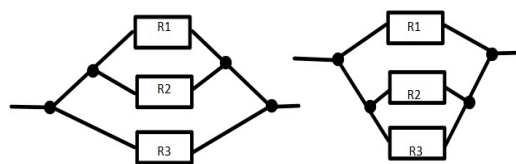
b) (3p) Calculați  $2 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^{2024}$ .

3. (7p) Un fierbător de apă cu rezistența  $R_1$ , un cuptor electric cu rezistența  $R_2$  și o mașină de cafea cu rezistența  $R_3$  sunt legate în paralel conform figurii alăturate.

Rezistența totală  $R$  a grupării a două rezistențe  $R_i, R_j$  este

dată de relația:  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}, \forall R_i, R_j \in (0, \infty)$ .

Demonstrați că cele două circuite din figură au aceeași rezistență totală pentru oricare valori  $R_1, R_2, R_3 \in (0, \infty)$ .



4. (7p) Calculați  $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.