

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024  
Clasa a XII-a

1.

a) (4p) Arătați că un grup nu se poate scrie ca reuniunea a două subgrupuri proprii.

b) (3p) Este posibil ca un monoid să se scrie ca reuniunea a doi submonoizi proprii?

2. Fie  $(M, \cdot)$  un monoid cu cel puțin două elemente, în care există un element  $a$  cu proprietatea că  $a \cdot x = a$ ,  $\forall x \in M$  și  $(M \setminus \{a\}, \cdot)$  este grup.

a) (4p) Arătați că  $x \cdot a = a, \forall x \in M$  și dați exemplu de astfel de monoid.

b) (3p) Mai rămâne adevărată afirmația de la punctul a) dacă se renunță la ipoteza ca  $(M \setminus \{a\}, \cdot)$  să fie grup?

3. (7p) Determinați funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , știind că admite o primitivă  $F$  astfel încât

$$xf(x) + F(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \quad \forall x \in (0, \infty) \text{ și } F(1) = 1 - \ln(1+e).$$

4. (7p) Determinați valoarea lui  $a \in (2, 4)$  pentru care  $\int_2^4 \frac{a+1-x}{1+|a-x|} dx = \ln 4$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.