



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etape locală , SĂLAJ , 10.02.2024**

**Clasa a IX -a**

**Subiectul 1**

(3p) a) Fie expresia  $E(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 18x + 81}$ , unde  $x \in [1, 2]$ .

Determinați cea mai mare și cea mai mică valoare a lui  $E(x)$ .

(4p) b) Fie numărul real  $N = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ . Să se rezolve pe mulțimea numerelor întregi ecuația  $\left[\frac{x+1}{2}\right] = 2024[N]$ , unde  $[t]$  reprezintă partea întreagă a lui  $t$ .

**Subiectul 2**

(7p) Demonstrați că, dacă  $ab+bc+ac = abc$ , atunci  $\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq 9, \forall a, b, c > 0$ .

**Subiectul 3**

(4p) a) Demonstrați următoarea egalitate:  $P(n): 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 3}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}, n \in \mathbb{N}^*$ .

(3p) b) Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât  $a_1 = 1$ . Arătați că există

$k > 1$  astfel încât  $a_k$  să fie pătrat perfect și că progresia aritmetică conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.

**Subiectul 4**

Fie  $ABCD$  un patrulater convex,  $\{O\} = AC \cap BD$ .

(5p) a) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  și  $DOA$  determină un paralelogram.

(2p) b) Să se demonstreze că punctul  $O$  este centrul paralelogramului  $G_1G_2G_3G_4$  dacă și numai

dacă are loc relația  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ .

**Timp de lucru: 3 ore.**

**Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.**