



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

Barem de corectare, clasa a XI-a

Subiectul 1.

Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X^{2019} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2021 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Notăm cu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, înmulțind la stânga și apoi la dreapta ecuația dată obținem
succesiv $X^{2010} + 2X^2 = X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ 1p
Obținem că $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ 2p
Arătăm că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nca^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$ 1p
Astfel ecuația se reduce la $a^{2019} + 2a = 3$ și $2019ca^{2018} + 2c = 2021$ 1p
 $a = 1$, soluție unică, pentru că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2019} + 2x$ este o funcție strict crescătoare 1p
Rezultă că $c = 1$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

Subiectul 2.

Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente numere reale și A^t matricea transpusă. Știind că $\det(A + A^t) = 8$ și $\det(A + 2 \cdot A^t) = 27$ să se calculeze $\det(A)$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$ 1p
 $\det(A + A^t) = 4ad - b^2 - 2bc - c^2$ 1p
 $A + 2 \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}$ 1p
 $\det(A + 2 \cdot A^t) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2$ 1p
Avem relațiile: $4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8$ (relația 1)
 $9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27$ (relația 2) 1p
Din relația (1) avem $4ad - 2bc - 8 = b^2 + c^2$ 1p
Relația (2) se scrie: $9ad - 2(b^2 + c^2) - 5bc = 27$, iar dacă înlocuim pe $b^2 + c^2$
se obține $ad - bc = 11$, adică $\det(A) = ad - bc = 11$ 1p

Subiectul 3.

Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$

(3p) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \sin \frac{1}{f(x)}$

(2p) b) Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{f(x+3)} \right)^{ax} = e^{a^2+2}$

(2p) c) Arătați că suma $S = \sum_{k=3}^{302} \left(\lim_{x \rightarrow k} \frac{1}{f(x)} \right)$ este un număr natural divizibil cu 25.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \sin \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$ 1p

$\sin(x-2) \in [-1,1]$, oricare $x \in \mathbb{R}$ 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 0$ 1p

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{f(x+3)} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{ax} = e^{3a}$ 1p

$e^{3a} = e^{a^2+2}$, deci $a^2 - 3a + 2 = 0$, de unde $a = 2, a = 1$ 1p

c) $S = \sum_{k=3}^{302} \left(\lim_{x \rightarrow k} \frac{1}{f(x)} \right) = \sum_{k=3}^{302} (k-2)$ 1p

$\sum_{k=3}^{302} (k-2) = 150 \cdot 301 : 25$ 1p

Subiectul 4.

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = a_n(1 - a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și calculați limita sa.

(3p) b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 2$.

Soluție:

a) Avem $a_1 \in (0,1), a_2 = a_1(1 - a_1) \in (0,1)$

Presupunem că : $a_n \in (0,1)$ și avem $a_{n+1} = a_n(1 - a_n) \in (0,1)$

Conform principiului inducției matematice obținem $0 < a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

Deoarece $a_n \in (0,1)$ și $1 - a_n \in (0,1) \Rightarrow a_{n+1} = a_n(1 - a_n) < a_n$

Șirul dat este descrescător și mărginit inferior de 0. Fiind șir convergent, putem trece direct la

limită în relația de recurență $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 2p

b) Definim șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, b_n = na_n = \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$.

Din relațiile de mai sus rezultă că șirul $\left(\frac{1}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător nemărginit, îndeplinind condițiile aplicării teoremei Cesaro-Stolz.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: secretariat@isjsalaj.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Rezultă: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 (1-a_n)}{a_n - a_n (1-a_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-a_n) = 1$

Deci: $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 1 \dots \dots \dots 3p$

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.