



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

Barem de notare

Clasa a X –a

Subiectul 1

(3p) a) Arătați că numărul $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ este rădăcină a ecuației $x^3 + 3x + 2\sqrt{3} = 0$.

(4p) b) Fie $a, b, c \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ astfel încât $a + b + c = 1$.

Demonstrați că $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 4$.

Barem de corectare:

a) Fie $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

Folosind formula $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ pentru $a = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$.

avem:

$$x^3 = 2 - \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \right) - (2 + \sqrt{3}) \dots\dots\dots 1p$$

$$x^3 = -2\sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt[3]{4-3} \cdot x \dots\dots\dots 1p$$

se obține: $x^3 + 3x + 2\sqrt{3} = 0 \dots\dots\dots 1p$

b) Folosim inegalitatea $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Avem } \sqrt{2a+1} = \sqrt{1 \cdot (2a+1)} \leq \frac{1+2a+1}{2} = a+1 \dots\dots\dots 1p$$

Analog se obține: $\sqrt{2b+1} \leq b+1$ și $\sqrt{2c+1} \leq c+1 \dots\dots\dots 2p$

Adunăm relațiile: $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq (a+b+c) + 3 = 1 + 3 = 4 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 2

(2p) a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n$, unde n este număr natural nenul, iar $a_i \in (0,1)$ sau $a_i \in (1,\infty)$, $i = \overline{1,n}$.

(5p) b) Demonstrați că: $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \frac{3}{2}$, unde $x, y, z \in (1,\infty)$.

Barem de corectare:

a) Din inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1}} = n. \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

b) Avem $\log_{yz} x = \frac{\lg x}{\lg y + \lg z}$ și analoagele. Notăm $\lg y + \lg z = a$, $\lg x + \lg z = b$, $\lg x + \lg y = c$, și obținem: $\lg x = \frac{b+c-a}{2}$, $\lg y = \frac{a+c-b}{2}$, $\lg z = \frac{a+b-c}{2}$ (1). $\dots\dots\dots 3 \text{ p}$

Dacă $x, y, z \in (1,\infty)$ atunci $\lg x, \lg y, \lg z > 0$, adică $a, b, c > 0$ și folosind (1), avem:

$$\log_{yz} x + \log_{xz} y + \log_{xy} z = \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

$\dots\dots\dots 2 \text{ p}$

Subiectul 3

Se consideră funcția injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax + 2024)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

(2p) a) $a = 0$.

(2p) b) $f(-2023) = 1$.

(3p) c) f nu este surjectivă.

Barem de corectare:

a) $x=0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = f(2024)$ și $x=1 \Rightarrow f(1) \cdot f(0) = f(a+2024) \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $\Rightarrow f(2024) = f(a+2024) \Rightarrow a=0. \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

b) $x=2024 \Rightarrow f(2024) \cdot f(-2023) = f(2024) \Rightarrow f(2024) \cdot [f(-2023) - 1] = 0. \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Dacă $f(2024)=0 \Rightarrow f(x) \cdot f(1-x)=0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci există cel puțin două numere reale distincte pentru care f se anulează, contradicție cu injectivitatea funcției f .

Rămâne astfel că $f(-2023)=1$ 1p.

c) Demonstrăm că nu există număr real pentru care imaginea prin f să fie egală cu 0. Presupunem că există $t \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(t)=0$ 1p.

Din relația dată avem $f(t) \cdot f(1-t)=f(2024)$, de unde $f(2024)=0$, fals. 1p.

Deci 0 nu este imagine a lui f și funcția f nu este surjectivă. 1p.

Subiectul 4

(3p) a) Să se arate că $\forall z \in \mathbb{C}$ avem: $|1+z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $|1+z^2| \geq 1$.

(4p) b) Să se demonstreze că: $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Barem de corectare:

a) Presupunem prin absurd că $|1+z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $|1+z^2| < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(1+x)^2 + y^2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} < 1 \end{cases}, z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x^2+2x+y^2 < \frac{1}{2} \cdot 2 \\ 1+x^4+y^4+2x^2-2y^2-2x^2y^2+4x^2y^2 < 1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow (x^4+y^4+2x^2y^2) + (4x^2+4x+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 + (2x+1)^2 < 0 \quad (\text{fals}) \dots\dots\dots 1p$$

b) $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \Rightarrow z - \cos \frac{2\pi}{5} = i \sin \frac{2\pi}{5}$

$$z^2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \Rightarrow z^2 - \cos \frac{4\pi}{5} = i \sin \frac{4\pi}{5} \dots\dots\dots 1p$$

$$z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cdot z + \cos^2 \frac{2\pi}{5} = -\sin^2 \frac{2\pi}{5}$$

$$z^4 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \cdot z^2 + \cos^2 \frac{4\pi}{5} = -\sin^2 \frac{4\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cdot z = -1 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$z^4 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \cdot z^2 = -1 \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{z^4+1}{2z^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = z^5-1 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$E = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{z^4+z^3+z+1}{2z^2} = \frac{z^5-1}{2z^2 \cdot (z-1)} - \frac{z^2}{2z^2} = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$