



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

VII. osztály

1. Tétel

Legyen $S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$, ahol n egy nem nulla természetes szám.

(2p) a) Igazoljátok, hogy bármely n nem nulla természetes szám esetén $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

(5p) b) Határozzátok meg hány nullától különböző $n \leq 2024$ természetes szám létezik úgy, hogy S_n racionális szám legyen.

2. Tétel

Tekintsük az a, b, c és d nullától különböző racionális számokat.

Ha $\frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b}$, igazoljátok, hogy $abcd < 0$.

3. Tétel

Legyen ABCD trapéz, melyben $AB \parallel CD$ és $CD = 2AB$. Legyen az M pont a (CD) szakasz felezőpontja és $AC \cap BM = \{P\}$. Ha tudjuk, hogy az ABCD trapéz területe egyenlő 36 cm^2 , számítsátok ki a PMC háromszög területét.

4. Tétel

Legyen egy ABC háromszög, melyben a $\angle BAC = 60^\circ$ és $\angle ABC = 45^\circ$ szögek. Tekintsük $D \in (AC)$ és $E, F \in (AB)$ pontokat úgy, hogy $\angle BDC = 75^\circ$, $BE = DC = 2 \text{ cm}$, $\angle AFD = 105^\circ$

(4p) a) Határozzátok meg a DE szakasz hosszát.

(3p) b) Ha (EM a $\angle BED$ szög szögfelezője, ahol $M \in BD$, (EN az $\angle AED$ szög szögfelezője, ahol

$N \in AD$ és $FD \cap EN = \{P\}$, igazoljátok, hogy a DMEP négyszög téglalap.

Munkaidő 3 óra.

Minden feladat 7 pontot ér.