



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etape locală, SĂLAJ, 10.02.2024**

**Clasa a VII-a**

**Subiectul 1**

Se consideră  $S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$ , unde  $n$  este un număr natural nenul.

(2p) a) Arătați că, pentru orice  $n$  număr natural nenul,  $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

(5p) b) Aflați câte numere naturale nenule  $n \leq 2024$  există, astfel încât  $S_n$  să fie număr rațional.

**Subiectul 2**

Se consideră numerele raționale nenule  $a, b, c$  și  $d$ .

Dacă  $\frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b}$ , arătați că  $abcd < 0$ .

**Subiectul 3**

Fie ABCD trapez cu  $AB \parallel CD$  și  $CD = 2AB$ . Considerăm punctul M mijlocul segmentului (CD) și  $AC \cap BM = \{P\}$ . Știind că aria trapezului ABCD este egală cu  $36 \text{ cm}^2$ , calculați aria triunghiului PMC.

**Subiectul 4**

Fie triunghiul ABC în care  $\angle BAC = 60^\circ$  și  $\angle ABC = 45^\circ$ . Considerăm punctele  $D \in (AC)$  și  $E, F \in (AB)$  astfel încât  $\angle BDC = 75^\circ$ ,  $BE = DC = 2 \text{ cm}$ ,  $\angle AFD = 105^\circ$ .

(4p) a) Determinați lungimea segmentului DE.

(3p) b) Dacă (EM este bisectoarea unghiului  $\angle BED$  cu  $M \in BD$ , (EN este bisectoarea unghiului  $\angle AED$  cu  $N \in AD$  iar  $FD \cap EN = \{P\}$ , arătați că patrulaterul DMEP este dreptunghi.

**Notă: Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare subiect este notat cu 7 puncte**