



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: secretariat@isjsalaj.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapă locală, SĂLAJ, 10.02.2024

XI. osztály

1. Feladat

Határozd meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$X^{2019} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2021 & 3 \end{pmatrix}!$$

2. Feladat

Legyen A egy másodrendű, valós elemű négyzetes mátrix és legyen A^t a transzponált mátrixa.

Tudva, hogy

$$\det(A + A^t) = 8 \text{ és } \det(A + 2 \cdot A^t) = 27, \text{ számítsd ki } \det(A) \text{ értékét.}$$

(G.M.)

3. Feladat

Legyen $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-2}$

(3p) a) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \sin \frac{1}{f(x)}$;

(2p) b) Határozd meg $a \in \mathbb{R}$ értékét, amelyre $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{f(x+3)} \right)^{ax} = e^{a^2+2}$;

(2p) c) Mutasd ki, hogy az $S = \sum_{k=3}^{302} \left(\lim_{x \rightarrow k} \frac{1}{f(x)} \right)$ összeg 25-tel osztható természetes szám!

4. Feladat

Legyen az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat, $a_1 \in (0,1)$ és $a_{n+1} = a_n(1 - a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Bizonyítsd be, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

(3p) b) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 1$.

Munkaidő: 3 óra.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.