



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: secretariat@isjsalaj.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024

Clasa a X -a

1 Feladat

(3p) a) Igazoljátok, hogy a $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ szám az $x^3 + 3x + 2\sqrt{3} = 0$ egyenlet gyöke.

(4p) b) Legyen $a, b, c \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ úgy, hogy $a + b + c = 1$.

Igazoljátok, hogy $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 4$.

2 Feladat

(2p) a) Igazoljátok az $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n$ egyenlőtlenséget, ahol n nullától különböző természetes szám, $a_i \in (0, 1)$ vagy $a_i \in (1, \infty), i = \overline{1, n}$.

(5p) b) Igazoljátok, hogy: $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \frac{3}{2}$, ahol $x, y, z \in (1, \infty)$.

3 Feladat

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektív függvény, mely teljesíti az $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax + 2024)$ összefüggést, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$. Igazoljátok, hogy:

(2p) a) $a = 0$.

(2p) b) $f(-2023) = 1$.

(3p) c) f nem szürjektív.

4 Feladat

(3p) a) Igazoljátok, hogy $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén: $|1+z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $|1+z^2| \geq 1$.

(4p) b) Igazoljátok, hogy: $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Munkaidő: 3 óra.

Minden feladat 7 pontot ér.