



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: secretariat@isjsalaj.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală, SĂLAJ, 10.02.2024

Clasa a X -a

Subiectul 1

(3p) a) Arătați că numărul $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ este rădăcină a ecuației $x^3 + 3x + 2\sqrt{3} = 0$.

(4p) b) Fie $a, b, c \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ astfel încât $a + b + c = 1$.

Demonstrați că $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 4$.

Subiectul 2

(2p) a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n$, unde n este număr natural nenul, iar

$a_i \in (0, 1)$ sau $a_i \in (1, \infty)$, $i = \overline{1, n}$.

(5p) b) Demonstrați că: $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \frac{3}{2}$, unde $x, y, z \in (1, \infty)$.

Subiectul 3

Se consideră funcția injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax + 2024)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

(2p) a) $a = 0$.

(2p) b) $f(-2023) = 1$.

(3p) c) f nu este surjectivă.

Subiectul 4

(3p) a) Să se arate că $\forall z \in \mathbb{C}$ avem: $|1+z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $|1+z^2| \geq 1$.

(4p) b) Să se demonstreze că: $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.