



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2024

Clasa a V-a

Subiectul I. Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:

- (2p) 1. Câte numere de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 7 și 8?
A. 3 B. 18 C. 21 D. 90 E. 27
- (2p) 2. Câte numere de cinci cifre conțin secvența 2024?
A. 10 B. 9 C. 81 D. 19 E. 100
- (2p) 3. Câte cifre de 9 conține scrierea în baza 10 a numărului $10^{2024} - 2024$?
A. 2020 B. 2021 C. 2022 D. 2023 E. 2024
- (2p) 4. Câte pătrate perfecte sunt în șirul: $6^9, 9^6, 7^{22}, 49^{17}, 289^{13}, 169^{11}, 361^3$?
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7
- (1p) 5. Restul împărțirii numărului 2024^{2023} la 253 este:
A. 251 B. 0 C. 1 D. 252 E. 77
- (1p) 6. Numerele naturale x, y, z verifică relațiile $3x + 2y + z = 598$ și $x + 2y + 3z = 602$.
Suma lor este egală cu:
A. 300 B. 200 C. 101 D. 100 E. 104
- (1p) 7. Dacă $\overline{xy9} = 3^{x+y-3}$, atunci y^x este egal cu:
A. 128 B. 243 C. 81 D. 49 E. 64
- (1p) 8. Numărul numerelor naturale n , pentru care $2^{2023} \leq n \leq 2^{2024}$, este egal cu:
A. 1 B. 2 C. 2^{2023} D. $2^{2023} + 1$ E. 2^{2024}
- (1p) 9. Suma cifrelor numărului $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^{2023} \cdot 5^{2024}$ este egală cu:
A. 4 B. 6 C. 12 D. 13 E. 24



(1p) 10. Ultima cifră a unui număr natural de patru cifre este 8. Dacă mutăm cifra 8 de pe locul unităților pe locul miilor obținem un număr cu 3744 mai mare decât numărul inițial. Calculând produsul cifrelor numărului inițial obținem:

A. 21

B. 56

C. 336

D. 448

E. 108

Pentru subiectele II și III scrie rezolvările complete.

Subiectul II Aflați numerele naturale \overline{abcd} știind că $7 \cdot (\overline{abc} + 7) + 7^d = 2023$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2023

Subiectul III a) Suma a trei numere naturale este 321. Aflați numerele dacă prin împărțire pe rând la 9, 11 și respectiv 13 obținem același cât și același rest.
b) Arătați că numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024 + 2024^2 + 2$ nu este pătrat perfect.

NOTE. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru rezolvarea corectă a subiectelor II și III se acordă câte 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2024

Clasa a VI-a

Subiectul I. Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indicați varianta corectă de răspuns:

- (2p) 1. Numărul pătratelor perfecte de trei cifre pentru care exact două dintre acestea sunt egale este:
A. 9 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5
- (2p) 2. Cel mai mic număr natural care are exact 6 divizori proprii este:
A. 18 B. 24 C. 32 D. 30 E. 12
- (2p) 3. Prețul unui obiect este 200 lei. Acesta se scumpește cu 10%, după care se ieftinește cu 10% din noul preț. După aceste operații, prețul final al obiectului este:
A. 200 B. 242 C. 198 D. 210 E. 180
- (2p) 4. Pe o dreaptă se consideră 2024 puncte distincte $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2024}$, astfel încât $M_1M_2 = 1$ cm, $M_2M_3 = 2$ cm, $M_3M_4 = 1$ cm, $M_4M_5 = 2$ cm, $\dots, M_{2023}M_{2024} = 1$ cm. Lungimea segmentului M_1M_{2024} , exprimată în cm, este egală cu:
A. 2024 B. 3034 C. 2047245 D. 2047247 E. 2023
- (1p) 5. Măsura în grade sexagesimale a triplului complementului unui unghi dat este egală cu jumătate din măsura suplementului unghiului dat. Măsura unghiului dat este egală cu:
A. 72° B. 45° C. 108° D. 60° E. 36°
- (1p) 6. Bisectoarele unghiurilor adiacente AOB și BOC sunt perpendiculare. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
A. A, O, B sunt puncte coliniare B. $OA \perp OC$ C. A, O, C sunt puncte coliniare
D. Semidreptele OB și OC sunt opuse E. A, B, C sunt puncte coliniare
- (1p) 7. O mulțime de numere naturale are 13 elemente a căror sumă este egală cu 90. Produsul tuturor elementelor mulțimii date este egal cu:
A. 1170 B. 0 C. 13 D. 90 E. 2024

- (1p) 8. Se dă mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{2024}, \frac{2}{2023}, \frac{3}{2022}, \dots, \frac{2023}{2}, \frac{2024}{1} \right\}$. Cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$ este:
- A. 15 B. 16 C. 17 D. 13 E. 14
- (1p) 9. Două drepte a și b sunt intersectate de o secantă d . Unul dintre unghiurile formate de dreptele a și d are măsura de $(x+20)^\circ$, iar unul dintre unghiurile formate de dreptele b și d are măsura de $(3x)^\circ$. Mulțimea valorilor lui x pentru care a și b sunt paralele este:
- A. vidă B. $\{10\}$ C. $\{40\}$ D. $\{10, 40\}$ E. $\{10, 20, 40\}$
- (1p) 10. Pe o dreaptă d se consideră punctele A_0, A_1, A_2, \dots astfel încât lungimea segmentului $A_n A_{n+1}$ este egală cu $n+1$ cm, pentru orice număr natural n . Segmentul $A_0 A_1$ se colorează cu roșu, segmentele $A_1 A_2$ și $A_2 A_3$ se colorează cu galben, segmentele $A_3 A_4$, $A_4 A_5$ și $A_5 A_6$ se colorează cu albastru, segmentele $A_6 A_7$, $A_7 A_8$, $A_8 A_9$ și $A_9 A_{10}$ se colorează cu verde, apoi segmentul $A_{10} A_{11}$ cu roșu și tot așa (se reia procedeul). Dacă X este un punct fixat pe segmentul $A_0 A_{2021}$ astfel încât $A_0 X = 2024$ cm, atunci segmentul pe care se află X este colorat cu:
- A. roșu B. galben C. albastru D. verde E. nu se poate preciza

Pentru subiectele II și III scrie rezolvările complete.

Subiectul II Determinați numerele naturale nenule n și r știind că numerele 326, 420, 485 și 579 împărțite la n dau resturile r , $2r$, $3r$ și respectiv $4r$.

Gazeta Matematică nr. 9/2023

Subiectul III Se consideră punctele A , B , C , D și O astfel încât $AOB = 100^\circ$, C și D sunt situate în interiorul unghiului AOB , $BOC = 3 \cdot AOC$ și $COD = 2 \cdot AOC$.

- a) Determinați măsurile unghiurilor AOC , BOC și COD .
- b) Arătați că unghiurile AOB și COD au aceeași bisectoare.

NOTE. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru rezolvarea corectă a subiectelor II și III se acordă câte 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2024

Clasa a VII-a

Subiectul I. Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indicați varianta corectă de răspuns:

- (2p) 1. Aria unui dreptunghi, cu dimensiunile (exprimate în centimetri) egale cu cel mai mic și cel mai mare număr prim de o cifră, este egală cu aria unui pătrat care are latura de:
A. $\sqrt{5}$ cm B. $\sqrt{7}$ cm C. $\sqrt{14}$ cm D. $\sqrt{35}$ cm E. 5 cm
- (2p) 2. Două dintre laturile unui paralelogram au lungimile egale cu 4 cm, respectiv 5 cm. Perimetrul paralelogramului este egal cu:
A. 9 cm B. 20 cm C. 18 cm D. 40 cm E. 13 cm
- (2p) 3. În trapezul $ABCD$, cu $AB > CD$, se construiesc perpendicularele $DM \perp AB$ și $CN \perp AB$, unde $M, N \in AB$. Se știe că $AM + NB = 4$ cm și că lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu 8 cm. Baza mică a trapezului are lungimea egală cu:
A. 4 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 10 cm E. 2 cm
- (2p) 4. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB > BC$ și M un punct în exteriorul dreptunghiului astfel încât triunghiul BCM este echilateral. Perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu 32 cm, iar distanța de la punctul M la dreapta AD este egală cu $10 + 3\sqrt{3}$ cm. Aria dreptunghiului este egală cu:
A. 60 cm^2 B. $2(10 + 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ C. $(10 + 3\sqrt{3})^2 \text{ cm}^2$
D. $(10 + 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2$ E. 96 cm^2
- (1p) 5. Valoarea lui x , unde $x = \frac{\sqrt{9+3\sqrt{3}} + \sqrt{9-3\sqrt{3}}}{\sqrt{9+3\sqrt{3}} - \sqrt{9-3\sqrt{3}}}$ este egală cu:
A. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ B. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ C. $3 + \sqrt{3}$ D. $3 - \sqrt{3}$ E. 3
- (1p) 6. Fie numărul real $a = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 + \dots$, unde suma are 2024 de termeni. Atunci
A. $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ B. $\sqrt{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ C. $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ D. a este par E. $a = 2024$

- (1p) 7. Numărul de numere reale x care verifică egalitatea $||x-1|-1|-1|=1$ este egal cu:
A. 2 B. 0 C. 4 D. 3 E. 5
- (1p) 8. Fie $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2024}^2} - 2$, unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere naturale impare. Atunci:
A. $A \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ B. $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ C. $40 < A \leq 44$ D. $A \leq 40$ E. $A \in \mathbb{N}$
- (1p) 9. Fie pătratul $MNPQ$ în care O este punctul de intersecție a diagonalelor sale, iar T este mijlocul laturii MN . Dacă $PT \cap QN = \{K\}$, atunci raportul dintre aria patrulaterului $MTKO$ și aria pătratului este egal cu:
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$ E. $\frac{1}{10}$
- (1p) 10. Fie mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(3n-2)^2 + 3(4n-5)} \in \mathbb{Q} \right\}$. Atunci:
A. $A = \{-3, 3\}$ B. $A = \{-2, 2\}$ C. $A = \{-1, 0, 1\}$ D. $A = \{0\}$ E. $A = \emptyset$

Pentru subiectele II și III scrie rezolvările complete.

Subiectul II Determinați numerele naturale a și b , știind că există un unic număr $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b}$.

Gazeta Matematică nr. 10/2023

Subiectul III În triunghiul ABC se consideră bisectoarea AD , $D \in BC$. Tangenta în punctul D la cercul circumscris triunghiului ADC intersectează latura AB în E , iar tangenta în punctul D la cercul circumscris triunghiului ADB intersectează latura AC în F . Arătați că:

- a) $\sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle ACB$;
- b) $DE \equiv DF$;
- c) $EF \parallel BC$.

NOTE. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru rezolvarea corectă a subiectelor II și III se acordă câte 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2024

Clasa a VIII-a

Subiectul I. Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indicați varianta corectă de răspuns:

(2p) 1. Numărul numerelor întregi cuprinse în interval $\left[\sqrt{16-6\sqrt{7}}; 2024\frac{1}{2024}\right]$ este:

- A. 2022 B. 2023 C. 2024 D. 2025 E. 2030

(2p) 2. Dacă $x + \frac{1}{x} = 3$, atunci valoarea numărului $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x + x^2 + x^3$ este egală cu:

- A. 7 B. 10 C. 28 D. 40 E. 39

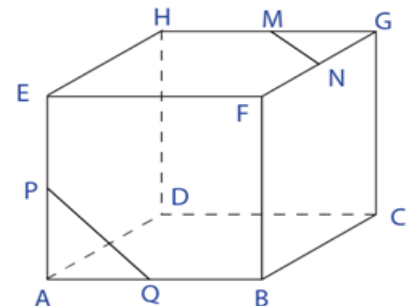
(2p) 3. Pentru orice numere reale a și b , numărul $E = ((a+b)^2 - 2(a+b) + 1) : (a+b-1)$ este egal cu:

- A. $a+b-1$ B. $a-b+1$ C. $a+b$ D. $a-b$ E. $a+b+ab$

(2p) 4. În figura alăturată, $ABCDEFGH$ este un cub, iar punctele M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor HG, FG, AE , respectiv AB .

Măsura unghiului dintre dreptele MN și PQ este egală cu:

- A. 60° B. 30° C. 90° D. 45° E. 0°



(1p) 5. În piramida patrulateră regulată cu vârful V și baza $ABCD$, latura bazei este de lungime a , iar muchia laterală $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Măsura unghiului dintre planele (VAB) și (VDC) este egală cu:

- A. 60° B. 30° C. 90° D. 45° E. 15°

(1p) 6. Fie numărul $S = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2024} + 2024\sqrt{2023}}$.

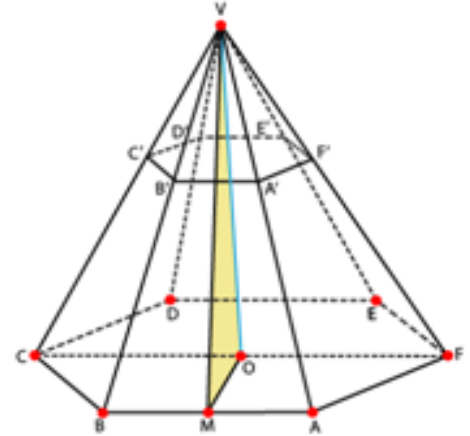
Partea întreagă a numărului S este egală cu:

- A. 0 B. 2024 C. 2023 D. 1 E. 3

- (1p) 7. Într-o piramidă hexagonală regulată dreaptă $VABCDEF$ cu latura bazei $L = 40$ cm și muchia laterală $m = 50$ cm se duce un plan $A'B'C'D'E'F'$, paralel cu planul bazei $ABCDEF$, așa încât latura hexagonului secțiunii să fie $l = 8$ cm.

Distanța dintre cele două plane este egală cu:

- A. 12 cm B. 24 cm C. 6 cm
D. 30 cm E. 18 cm



- (1p) 8. Expresia $E(x) = \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) : \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$, unde x este număr real, $x \neq -1$, este egală cu:

- A. 1 B. $x-1$ C. $x+1$ D. -1 E. $\frac{1}{x}$

- (1p) 9. Fie $ABCD$ un romb cu $\angle BAD = 60^\circ$ și latura de lungime a . Perpendiculara MA pe planul rombului, unde $M \notin (ABC)$, are lungimea $MA = \frac{a}{2}$. Distanța de la M la diagonala BD este:

- A. a B. $a\sqrt{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $2a$ E. $4a$

- (1p) 10. Pe planul trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AD = BC = CD = 12$ cm și $AB = 24$ cm, se ridică perpendiculara EA , astfel încât $EA = 12$ cm. Măsura unghiului format de planele (EBC) și (ADC) este:

- A. 60° B. 30° C. 90° D. 45° E. 15°

Pentru subiectele II și III scrie rezolvările complete.

Subiectul II Numerele reale a și b verifică relația $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 10 = 0$. Arătați că $|b - a - 5| \leq 2\sqrt{3}$.

Subiectul III Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub și punctele: M – mijlocul muchiei $A'B'$, N – mijlocul muchiei $A'D'$ și Q – mijlocul muchiei CD . Notăm $\alpha = (MNQ)$.

- a) Dacă dreapta $D'C'$ intersectează planul α în punctul T , demonstrați că $A'T \equiv MD'$.
b) Fie $\{P\} = DD' \cap \alpha$ și $\{S\} = BB' \cap \alpha$. Arătați că patrulaterul $PQSM$ este dreptunghi.

Gazeta Matematică nr. 9/2023

NOTE. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru rezolvarea corectă a subiectelor II și III se acordă câte 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.