

Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Neamț
03.02.2024
Clasa a VI -a

Problema 1.

a) Fie $A_k = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ are exact } k \text{ divizori}, a \leq 10 \cdot k\}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Determinați $\text{card}(A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

b) Determinați $\text{card}(B)$, unde $B = \{\overline{abc} \mid 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{ac}}\}$.

Soluție și barem:

a) $k = 2 \Rightarrow a$ are exact doi divizori $\Rightarrow a$ - prim și $a \leq 20$, deci,

$$A_2 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

1p

$k = 3 \Rightarrow a$ are exact trei divizori $\Rightarrow a$ este pătrat perfect al unui număr prim și $a \leq 3$, deci

$$A_3 = \{2^2, 3^2, 5^2\}$$

1p

$k = 4 \Rightarrow a$ are exact patru divizori $\Rightarrow a$ este produsul a două numere prime diferite și $a \leq 40$ deci

$$A_4 = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11, 2 \cdot 13, 2 \cdot 17, 2 \cdot 19, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11, 3 \cdot 13, 5 \cdot 7\}$$

1p

$$A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset, \text{card}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \text{card}A_2 + \text{card}A_3 + \text{card}A_4 = 8 + 3 + 12 = 23$$

1p

$$\text{b) } \begin{cases} 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{ac}} \Rightarrow 2^{\overline{ab}} > 2^{\overline{bc}} \Rightarrow a \geq b \\ 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{ac}} \Rightarrow 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{ac}} = 2^{\overline{bc}} \Rightarrow b \geq c \end{cases}$$

1p

$$\begin{cases} (2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{ac}}) : 2^{\overline{bc}} = 2^{\overline{bc}} : 2^{\overline{bc}} \Leftrightarrow 2^{\overline{ab}-\overline{bc}} = 2^{\overline{ac}-\overline{bc}} + 1 \Rightarrow \overline{ac} = \overline{bc} \Rightarrow a = b \\ 2^{\overline{ab}} - 2^{\overline{ac}} = 2^{\overline{bc}} \Leftrightarrow 2^{\overline{ab}} = 2^{\overline{ac}+1} \Leftrightarrow a = c + 1 \end{cases}$$

1p

Deci $A = \{110, 221, 332, \dots, 998\}$ și deci $\text{card}(B) = 9$

1p**Problema 2.**

Arătați că fracția $\frac{20n+7}{40 \cdot n^2 + 31 \cdot n + 6}$ este ireductibilă, pentru orice număr natural n .

Supliment Gazeta Matematică, nr.11/2023

Soluție și barem:

$$40n^2 + 31n + 6 = 40n^2 + 16n + 15n + 6 = 8n(5n + 2) + 3(5n + 2) = (5n + 2)(8n + 3)$$

2p

Astfel, $\frac{20n+7}{40 \cdot n^2 + 31 \cdot n + 6} = \frac{20n+7}{(5n+2) \cdot (8n+3)}$. Presupunem că fracția este reductibilă.

Fie $d = (20n + 7, 5n + 2)$, $d \neq 1 \Rightarrow d \mid 20n + 7$ și $d \mid 5n + 2$ de unde rezultă că

$$d \mid (20n + 7) - 4 \cdot (5n + 2), \text{ adică } d \mid 1, \text{ absurd. (1)}$$

2p

Fie $d' = (20n + 7, 8n + 3)$, $d' \neq 1 \Rightarrow d' \mid 20n + 7$ și $d' \mid 8n + 3$ de unde rezultă că

$d' | 2 \cdot (20n + 7)$ și $d' | 5 \cdot (8n + 3)$, adică $d' | 1$, absurd. (2)

2p

Din (1) și (2) obținem că fracția este ireductibilă.

1p

Problema 3.

Considerăm unghiurile complementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$. Aflați măsurile celor două unghiuri știind că măsura unghiului determinat de bisectoarele lor interioare este de 25° .

Soluție și barem:

Fie $[OM]$ bisectoarea $\angle AOB$, $[ON]$ bisectoarea $\angle BOC$

Presupunem că cele două unghiuri sunt adiacente $\Rightarrow m(\angle MON) = 45^\circ$, fals.

Deci unghiurile nu pot fi complementare.

2p

Fără a restrânge generalitate presupunem că $m(\angle BOA) < m(\angle BOC)$.

$$m(\angle BOA) = 2x, m(\angle BOC) = 2y \Rightarrow m(\angle MON) = y - x \text{ și } x + y = 45^\circ$$

2p

Prin calcul obținem $y = 35^\circ$ și $x = 10^\circ$

2p

Astfel, $m(\angle BOA) = 20^\circ$, $m(\angle BOC) = 70^\circ$

1p

Problema 4.

Semidreptele $[OA]$, $[OB]$ și $[OC]$ determină trei unghiuri în jurul punctului O .

Dacă numerele naturale pare a și b reprezintă măsurile a două dintre cele trei unghiuri și $[a, b] = 2024 \cdot (a, b)$, aflați măsurile celor trei unghiuri.

Soluție și barem:

Notăm $(a, b) = d$. Atunci $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$ cu $(x, y) = 1$.

1p

Cum $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, obținem $x \cdot y = 2024$

1p

Cum $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ și $(x, y) = 1$ atunci x și y pot fi:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 253 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 11 \\ y = 184 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 23 \\ y = 88 \end{cases}$$

2p

$$\left. \begin{array}{l} a + b < 360 \Rightarrow d \cdot (x + y) < 360 \\ a, b \text{ sunt pare} \Rightarrow d = \text{par} \end{array} \right\} \Rightarrow x + y < 180$$

1p

$$\text{Deci } \begin{cases} x = 23 \\ y = 88 \end{cases} \text{ și } d = 2, \text{ adică } a = 46, b = 176.$$

1p

Cele trei unghiuri au măsurile $46^\circ, 176^\circ$ și 138° .

1p