

**Concursul de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**  
**Etapa Locală**  
**Maramureș – 10 februarie 2024**  
**Clasa a XII - a**  
**Secțiunea H2**  
**Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii**

1. Pe mulțimea numerelor complexe se definesc legile de compoziție  
 $x * y = ax + by + i$  și  $x \circ y = x + y + i - 1$ , cu  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $x, y \in \mathbb{C}$ .
  - a. Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  știind că legea de compoziție " $*$ " este comutativă și asociativă pe mulțimea numerelor complexe.
  - b. Pentru  $a = b = 1$ , determinați valoarea expresiei  $E = e_1^{4m} + e_2^{2024}$ , unde  $m$  este un număr natural,  $e_1$  este elementul neutru în raport cu legea de compoziție " $*$ " și  $e_2$  este elementul neutru în raport cu legea de compoziție " $\circ$ ".
  - c. Calculați  $x^{2024}$ , știind că  $x$  este soluția complexă a ecuației  $\underbrace{x^\circ x^\circ x^\circ \dots^\circ x}_{30 \text{ ori}} = 1 + 59i$ .

2. Una dintre cele mai cunoscute tehnici de criptare este cifrul lui Cezar, care folosește o permutare circulară pe literele alfabetului latin la o cheie  $k \in [0, 25]$  în mulțimea  $Z_{26}$ :

**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25**  
**A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**

Pentru criptarea mesajului este folosită o funcție bijectivă  $e_k(a) = (a + k) \bmod 26$ , unde  $k$  reprezintă cheia de criptare, iar  $a$  reprezintă numărul corespunzător literei din mesajul care va fi criptat

- a. Determinați care este textul ce se obține în urma criptării textului ADOLF HAIMOVICI, pentru  $k = 14$ .
  - b. Decriptați GIQQSG, pentru  $k = 14$ .
3. Se consideră

$$I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx \quad \text{și} \quad J_n = \int_2^4 \frac{\log_2^n x}{x} dx$$

cu  $n$  număr natural.

- a. Calculați  $I_0 + J_0$ .
  - b. Demonstrați că

$$I_n + J_n = \ln \left( \sqrt[n+1]{2^{2^{n+1}-1}} \right) + \frac{1}{2n} \left( 1 - \frac{1}{e^n} \right)$$

pentru orice număr natural nenul  $n$ .

4. Se consideră funcția  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}$ .

- a. Calculați

$$\int \frac{f(x)}{e^{\arcsin x}} dx.$$

- b. Determinați primitiva  $F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , a funcției  $f$  cu proprietatea că  $F(0) = \frac{1}{2}$ .

**Notă:**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.**

**Timp de lucru – 3 ore**