

**74. Országos matematikaolimpia**  
**Körzeti szakasz, 2024. február 10.**  
**XII. osztály**

**1. feladat.** Adott az

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - [x]}{x + \{x\} + 1}$$

függvény. Igazold, hogy az  $f$  függvény primitiválható és határozd meg az  $f$  primitív függvényeit, ha  $[a]$  az  $a$  egész részét,  $\{a\}$  az  $a$  törtrészét jelöli.

**2. feladat.** Az  $x, y \in (1, 2)$  esetén  $x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ .

a) Igazold, hogy  $x * y$  értelmezett és  $x * y \in (1, 2)$  bármely  $x, y \in (1, 2)$

b) Határozd meg az  $a$  valós szám értékét úgy, hogy az  $f : (0, +\infty) \rightarrow (1, 2), f(x) = \frac{x + a}{x + 1}$  bijektív legyen és  $f(xy) = f(x) * f(y)$  bármely  $x, y \in (0, +\infty)$  esetén.

**3. feladat.** Határozd meg az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, tudva, hogy van olyan  $F$  primitív függvénye, amelyre

$$x \cdot f(x) + F(x) = \frac{x + 1}{x \cdot (1 + xe^x)}$$

bármely  $x > 0$  esetén!

*Gazeta matematică*

**4. feladat.** A  $(G, \cdot)$  csoport esetén  $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$  a  $G$  csoport centruma.

a) Igazold, hogy  $(Z(G), \cdot)$  részcsoportja a  $(G, \cdot)$  csoportnak.

b) Igazold, hogy ha  $x \in G$  esetén  $x^{12} \in Z(G)$  és  $x^{21} \in Z(G)$ , akkor  $x^3 \in Z(G)$ .

c) Igazold, hogy ha  $x^{2023} \in Z(G)$  és  $x^{2025} \in Z(G)$ , bármely  $x \in G$  esetén, akkor a  $(G, \cdot)$  csoport kommutatív csoport!

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.*