

**A 74-a olimpiadă Națională de Matematică**  
**Etapa zonală, 10 februarie 2024**  
**Clasa a XII-a**

**Problema 1.** Se consideră funcția

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - [x]}{x + \{x\} + 1}$$

Demonstrați că funcția  $f$  admite primitive și determinați primitivele sale.

Notăție :  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$  și  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului  $a$ .

**Problema 2.** Pentru  $x, y \in (1, 2)$  fie  $x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ .

- a) Să se arate că  $x * y$  are sens pentru orice  $x, y \in (1, 2)$  și că  $x * y \in (1, 2)$  pentru orice  $x, y \in (1, 2)$
- b) Să se determine valoarea numărului real  $a$  astfel încât funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (1, 2)$ ,  $f(x) = \frac{x+a}{x+1}$  să fie bijectivă și să satisfacă condiția  $f(xy) = f(x) * f(y)$  pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$

**Problema 3.** Determinați funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , știind că admite o primitivă  $F$  astfel încât  $x \cdot f(x) + F(x) = \frac{x+1}{x \cdot (1+xe^x)}$  pentru orice  $x > 0$

*Gazeta matematică*

**Problema 4.**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup. Notăm cu  $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$  centrul grupului  $G$ .

- a) Să se arate că  $(Z(G), \cdot)$  este subgrup al lui  $(G, \cdot)$
- b) Să se arate că dacă pentru un  $x \in G$  avem  $x^{12} \in Z(G)$  și  $x^{21} \in Z(G)$ , atunci  $x^3 \in Z(G)$
- c) Să se arate că dacă  $x^{2023} \in Z(G)$  și  $x^{2025} \in Z(G)$ , pentru orice  $x \in G$ , atunci  $(G, \cdot)$  este un grup comutativ.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.*