



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**  
**Etapă locală – Constanța 03.02.2024**

**Clasa a XI-a**

secțiunea H1, filiera tehnologică – toate profilurile și specializările

**Barem de corectare și notare**

**SUBIECTUL I**

a)  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 = -\varepsilon - 1 \Rightarrow \varepsilon^3 = -(\varepsilon^2 + \varepsilon) = 1$  ..... 1p

$\varepsilon^4 = \varepsilon, \varepsilon^{2024} = (\varepsilon^3)^{674} \cdot \varepsilon^2 = 1 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^2$  ..... 2p

b)  $A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 + 1 & \varepsilon + \varepsilon^2 \\ \varepsilon + \varepsilon^2 & 1 + \varepsilon^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ -1 & -\varepsilon^2 \end{pmatrix} = -A$  ..... 1p

$\Rightarrow A^{2k} = -A$ , respectiv  $A^{2k+1} = A$ , pentru  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  (demonstrație prin inducție) ..... 2p

$\Rightarrow B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2024} = A - A + A - A + \dots + A - A = O_2$ . ..... 1p

**SUBIECTUL II**

a)  $M(0, a), P(3a, 0), OP \parallel MN \Rightarrow N(x_N, a)$ . ..... 1p

$A_{\triangle MNP} = a^2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ x_N & a & 1 \\ 3a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 \Leftrightarrow |-x_N \cdot a| = 2a^2 \Leftrightarrow_{a>0} x_N = 2a$  ..... 2p

b) Ecuația dreptei NP este  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2a & a & 1 \\ 3a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3a = 0$  și  $B \in NP \Leftrightarrow x_B + y_B - 3a = 0$  ..... 2p

Distanța de la benzinăria B până la depozitul din punctul M este minimă  $\Leftrightarrow MB \perp NP$

$\Leftrightarrow m_{MB} \cdot m_{NP} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \frac{3a - x_B - a}{x_B} = 1 \Leftrightarrow x_B = a$  și  $y_B = 2a$  ..... 2p

**SUBIECTUL III**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x+x^2) + \ln(1+x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x^2+x^4))}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right]$  ..... 2p

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x^2+x^4))}{x^4+x^2} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^2} = 1$  ..... 2p

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2024^{\frac{1}{x+1}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{2024^{\frac{1}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x+1}} \right) =$  ..... 1p

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \cdot \ln 2024 = \ln 2024$  ..... 2p

#### SUBIECTUL IV

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{2}{x})} = -1 \dots\dots\dots 2p$

Dreapta de ecuație  $y = -1$  este asimptotă orizontală la graficul funcției  $f$  spre  $-\infty \dots\dots\dots 1p$

b) Cazul  $\infty - \infty$  presupune  $a > 0 \dots\dots\dots 1p$

Amplificarea fracției cu conjugatul numitorului  $\sqrt{x^2 + 4x + 1} + ax + b$  și aducerea limitei la forma  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2(1-a^2)+x(4-2ab)+1-b^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+ax+b} \right) = -2 \dots\dots\dots 1p$

Din  $1 - a^2 = 0$  rezultă  $a = \pm 1$ , doar  $a=1$  convine.  $\dots\dots\dots 1p$

Din  $\frac{4-2ab}{1+a} = -2$ , rezultă  $b=4 \dots\dots\dots 1p$