

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 03.02.2024

Clasa a XII-a

secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \arctg x.$

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}.$

Soluție:

a) $\int x \cdot \arctg x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)' \arctg x \, dx =$
 $= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctg x - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) \frac{1}{x^2+1} \, dx =$ 2p

$= (x^2 + 1) \arctg x - x + C$ 1p

b) $\frac{x^2+1}{x^4+1} \, dx = \int \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})} \, dx = \int \frac{(x-\frac{1}{x})'}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \, dx =$ 2p

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C$ 2p

SUBIECTUL 2

a) Fie $a \in (0, \infty)$ și $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție pară și continuă. Arătați că:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = \int_0^a f(x) \, dx, \text{ oricare ar fi } m \in \mathbb{R}.$$

b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)(e^{2x}+1)} \, dx.$

Soluție:

a) $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx.$ 1p

$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{mt}} \, dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1+e^{mt}} \, dt = \int_0^a \frac{e^{mt} f(t)}{1+e^{mt}} \, dt.$ 2p

Deci $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = \int_0^a \frac{e^{mx} f(x)}{1+e^{mx}} \, dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = \int_0^a \frac{e^{mx} f(x) + f(x)}{1+e^{mx}} \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$ 2p

b) Funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ este pară și continuă1p

Conform rezultatului de la punctul a), avem că:

$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)(e^{2x}+1)} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ 1p

SUBIECTUL 3

Fie a un număr întreg fixat. Pe mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} considerăm legea de compoziție „*” definită prin:

$$x * y = 2(x + a)(y + a) - a \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

a) Demonstrați că legea * este asociativă.

b) Precizați dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât legea „*” să admită element neutru.

c) Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care $0 * 1 * 2 * \dots * 2024 + a = 2^{2024} \cdot 2025!$

Prof. Gurgui Adriana-Daniela

Soluție:

a) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z},$

$$(x * y) * z = [2(x + a)(y + a) - a] * z = 2 \cdot 2 \cdot (x + a)(y + a)(z + a) - a$$

$$x * (y * z) = x * [2(y + a)(z + a) - a] = 2 \cdot 2 \cdot (x + a)(y + a)(z + a) - a \dots\dots\dots 2p$$

b) Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru, atunci

$$e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{Z},$$

$$2 \cdot (e + a)(x + a) - a = x, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$(x + a)[2(x + a) - 1] = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$2(e + a) - 1 = 0, 2(e + a) = 1, \dots\dots\dots 1p$

fals, deoarece $2(e + a)$ este par, iar 1 este impar. Așadar, pentru nici o valoare $a \in \mathbb{Z}$, legea „ $*$ ” nu admite element neutru. **1p**

c) Inducție după n pentru

$$P(n) : 0 * 1 * 2 * \dots * n = 2^n \cdot a(a+1)(a+2)\dots(a+n) - a, \forall n \geq 1.$$

$$P(1) : 0 * 1 = 2a(a+1) - a.$$

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

$$P(k+1) : 0 * 1 * 2 * \dots * k * (k+1) = 2^{k+1} a(a+1) \dots (a+k)(a+k+1) - a.$$

$$\begin{aligned} 0 * 1 * 2 * \dots * k * (k+1) &= (0 * 1 * 2 * \dots * k) * (k+1) = \\ &= 2[2^k a(a+1) \dots (a+k) - a](a+k+1) - a = \\ &= 2^{k+1} a(a+1) \dots (a+k)(a+k+1) - a. \dots \dots \dots \mathbf{1p} \end{aligned}$$

$$0 * 1 * 2 * \dots * 2024 = 2^{2024} a(a+1)(a+2) \dots (a+2024) - a.$$

$$\text{Ecuația devine: } 2^{2024} a(a+1) \dots (a+2024) = 2^{2024} \cdot 2025!$$

$$a(a+1) \dots (a+2024) = 2025!$$

cu soluția unică $a = 1 \in \mathbb{Z}$ **2p**

SUBIECTUL 4

Un corp de iluminat conține două becuri B1 și B2 care se aprind simultan. În poziția „Deschis” fiecare dintre acestea furnizează lumină verde sau roșie. Aprinderea $a \stackrel{\text{def}}{=} (c_1, c_2)$, unde c_1 este culoarea becului B1, iar c_2 este culoarea becului B2.

Notăm cu G mulțimea tuturor aprinderilor posibile. Pe G definim legea de compoziție internă „ $*$ ” prin care aprinderilor a_1 și a_2 le asociem aprinderea $a_1 * a_2$ definită astfel:

- dacă becul B_i , $i=1,2$ are în a_1 și a_2 aceeași culoare, în $a_1 * a_2$ are culoarea verde.
- dacă becul B_i , $i=1,2$ are în a_1 și a_2 culori diferite, în $a_1 * a_2$ are culoarea roșie.

Exemplu: dacă $a_1 = (V, R)$ și $a_2 = (R, R)$, $a_1 * a_2 = (R, V)$, unde $R = \text{roșu}$, $V = \text{verde}$.

- a) Să se determine cardinalul mulțimii G .
- b) Determinați elementul neutru față de legea „ $*$ ”.
- c) Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian izomorf cu grupul lui Klein.

Prof. Gurgui Adriana-Daniela

Soluție:

a) Card $G = 2 \cdot 2 = 4$ **1p**

b) Fie $a_0 = (V, V) \in G$. Verificăm : $a_i * a_0 = a_0 * a_i = a_i$, $\forall a_i \in G$
Orice aprindere, prin compunere cu a_0 rămâne la fel, deoarece orice bec își păstrează culoarea (dacă este roșu și apoi verde, în final este tot roșu, iar dacă este verde și apoi tot verde, în final va fi tot verde).

..... **2p**

c) $G = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ cu $a_0 = (V, V)$, $a_1 = (V, R)$, $a_2 = (R, V)$, $a_3 = (R, R)$.

Tabla legii de compoziție:

$*$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Se verifică din tablă că legea „ $*$ ” este bine definită și admite ca element neutru pe a_0 **1p**

Verificăm asociativitatea. Fie 3 aprinderi oarecare $a_1, a_2, a_3 \in G$.

Arătăm prin următorul tabel că $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$

a_1	a_2	$a_1 * a_2$	a_3	$(a_1 * a_2) * a_3$	$a_2 * a_3$	$a_1 * (a_2 * a_3)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	R	R	R	R
V	R	R	V	R	R	R
R	V	R	V	R	V	R
V	R	R	R	V	V	V
R	V	R	R	V	R	V
R	R	V	V	V	R	V
R	R	V	R	R	V	R

..... **1p**

Analizând tabla legii de compoziție, observăm că orice element este simetrizabil și că legea „ $*$ ” este comutativă. $(G, *)$ este grup abelian. **1p**

Fie $f: G \rightarrow K$, $f(a_0) = e$, $f(a_1) = u$, $f(a_2) = v$, $f(a_3) = w$, unde (K, \cdot) este lui Klein.

Tabla legii de compoziție este la fel structurată ca cea a grupului lui Klein.

\cdot	e	u	v	w
e	e	u	v	w
u	u	e	w	v
v	v	w	e	u
w	w	v	u	e

Așadar, $(G, *) \sim (K, \cdot)$ **1p**