

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**Etapa locală – Constanța, 03.02.2024****Clasa a XII-a**

Secțiunea H2 -filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL 1

Să se calculeze primitivele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \arctg x.$

b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}.$

SUBIECTUL 2a) Fie $a \in (0, \infty)$ și $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție pară și continuă. Arătați că:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{mx}} dx = \int_0^a f(x) dx, \text{ oricare ar fi } m \in \mathbb{R}.$$

b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)(e^{2x}+1)} dx.$

SUBIECTUL 3Fie a un număr întreg fixat. Pe mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} considerăm legea de compoziție „ $*$ ” definită prin:

$$x * y = 2(x + a)(y + a) - a \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

- a) Demonstrați că legea „ $*$ ” este asociativă.
- b) Precizați dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât legea „ $*$ ” să admită element neutru.
- c) Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care $0 * 1 * 2 * \dots * 2024 + a = 2^{2024} \cdot 2025!$

*Prof. Gurgui Adriana-Daniela***SUBIECTUL 4**

Un corp de iluminat conține două becuri B1 și B2 care se aprind simultan. În poziția ^{def} „Deschis” fiecare dintre acestea furnizează lumină verde sau roșie. Aprinderea $a \stackrel{def}{=} (c_1, c_2)$, unde c_1 este culoarea becului B1, iar c_2 este culoarea becului B2.

Notăm cu G mulțimea tuturor aprinderilor posibile. Pe G definim legea de compoziție internă „ $*$ ” prin care aprinderilor a_1 și a_2 le asociem aprinderea $a_1 * a_2$ definită astfel:

- dacă becul $B_i, i=1,2$ are în a_1 și a_2 aceeași culoare, în $a_1 * a_2$ are culoarea verde.
- dacă becul $B_i, i=1,2$ are în a_1 și a_2 culori diferite, în $a_1 * a_2$ are culoarea roșie.

Exemplu: dacă $a_1 = (V, R)$ și $a_2 = (R, R)$, $a_1 * a_2 = (R, V)$, unde $R = \text{roșu}$, $V = \text{verde}$.

- a) Să se determine cardinalul mulțimii G .
- b) Determinați elementul neutru față de legea „ $*$ ”.
- c) Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian izomorf cu grupul lui Klein.

*Prof. Gurgui Adriana-Daniela***Notă:**

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.