

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 3.02.2024

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați în $M_3(\mathbb{Z})$ ecuația $X^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2023

SUBIECTUL 2

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $\det(I_2 - x \cdot AB) = \det(I_2 - x \cdot BA)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha - 1) \cdot \beta \neq 0$, astfel încât $AB + \alpha \cdot BA = \beta \cdot I_2$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k + 2^{1-k} + 3}$, $\forall n \geq 1$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left((a_n)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{a_n} \right)$.

Cristina Homencovski

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_{n+1} = x_n + (x_n)^{\frac{1}{x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - n}{(\ln x_n)^2} = \frac{1}{2}$.

Nelu Chichirim

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.