

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - CLASA A IX-A**

**SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV**

**SUBIECTUL 1.** Determinați numerele reale  $a, b, c \in (0, \infty)$  știind că:

$$\frac{(a+b^2)^4}{a^2+b^4} + \frac{(b+c^2)^4}{b^2+c^4} + \frac{(c+a^2)^4}{c^2+a^4} = 8(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

*Supliment Gazeta Matematică nr.9/2023*

Soluție. Folosim inegalitatea mediilor,  $M_a \geq M_g$ ,  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ,  $(\forall) x, y \geq 0$ , rezultă  $(x+y)^2 \geq 4xy$ .

Egalitate are loc dacă  $x = y$ .....1p

$$\sum_{cyc} \frac{(a+b^2)^4}{a^2+b^4} = \sum_{cyc} \frac{[(a^2+b^4)+2ab^2]^2}{a^2+b^4} \geq \sum_{cyc} \frac{4(a^2+b^4)2ab^2}{a^2+b^4} = 8 \sum_{cyc} ab^2, \dots\dots\dots 3p$$

Egalitate are loc dacă  $a^2 + b^4 = 2ab^2$ ,  $(a-b^2)^2 = 0$ ,  $a = b^2$  și analogele  $b = c^2$ ,  $c = a^2$ , .....1p.

$a = b^2 = c^4 = a^8$ ,  $a^8 - a = 0$ ,  $a(a^7 - 1) = 0$ . Dacă  $a = 0$ , fals, deoarece  $a \in (0, \infty)$ . Dacă  $a^7 = 1$ , rezultă

$a = 1 \in (0, \infty)$ ,  $b = c = 1$ . În concluzie  $a = b = c = 1$ .....2p

**SUBIECTUL 2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații

$$\begin{cases} y^{2022} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4 + 1} \\ y^{-2024} = \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \end{cases}$$

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

Soluție. Arătăm că  $\frac{2x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4 + 1} \leq 1$ ,  $\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 + 1} \geq 0$ ,  $\frac{x^2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^4 + 1} \geq 0$ ,

$$\frac{(x^2 + 1)(x - 1)^2}{x^4 + 1} \geq 0, \text{ adevărat, } (\forall) x \in \mathbb{R}, \dots\dots\dots 1p.$$

Arătăm că  $\frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \leq 1$ ,  $\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + 1} \geq 0$ ,  $\frac{x^3(x - 1) - (x - 1)}{x^4 + 1} \geq 0$ ,  $\frac{(x - 1)(x^3 - 1)}{x^4 + 1} \geq 0$ ,

$$\frac{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}{x^4 + 1} = \frac{(x - 1)^2[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{x^4 + 1} \geq 0, \text{ adevărat, } (\forall) x \in \mathbb{R}, \dots\dots\dots 1p.$$

Rezultă  $y^{2022} \leq 1$  și  $y^{-2024} \leq 1$ , deci  $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cap [-1, 1] = \{-1, 1\}$ , .....1p.

Dacă  $y \in \{-1, 1\}$   $x^4 + 1 = 2x^3 - 2x^2 + 2x$ ,  $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = 0$ , rezultă  $x - 1 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x^2 + 1 \geq 1$  și

$$x^4 + 1 = x^3 + x, (x - 1)^2(x^2 + x + 1) = 0, \text{ rezultă } x - 1 = 0, x = 1, x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$S = \{(1, -1), (1, 1)\}$ , .....4p.

**SUBIECTUL 3.** Considerăm patrulaterul  $ABCD$ . Fie punctele

$M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$  astfel încât  $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QA} = k$  și punctele

$R \in (MN), S \in (NP), T \in (PQ), U \in (QM)$  astfel încât  $\frac{RM}{RN} = \frac{SN}{SP} = \frac{TP}{TQ} = \frac{UQ}{UM} = l$ , unde

$k, l \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ . Să se arate că dacă  $RSTU$  este paralelogram, atunci  $ABCD$  este paralelogram.

*Prof. Marian Ciorăscu, Brăila*

Soluție.

Fie  $O$  un punct oarecare în plan

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{k+1}, \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD}}{k+1}, \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OA}}{k+1} \quad 1p$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + l\overrightarrow{ON}}{l+1}, \overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{ON} + l\overrightarrow{OP}}{l+1}, \overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{OQ}}{l+1}, \overrightarrow{OU} = \frac{\overrightarrow{OQ} + l\overrightarrow{OM}}{l+1} \quad 1p$$

$$RTSU \text{ paralelogram} \Leftrightarrow \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{TS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OU} \quad 1p$$

$$(1-l)(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}) = \vec{0} \text{ și } l \neq 1 \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} \quad 2p$$

$$(1-k)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0} \text{ și } k \neq 1 \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \quad 1p$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ rezultă } ABCD \text{ paralelogram} \quad 1p$$

**SUBIECTUL 4.** Aflați toate numerele  $\overline{abcd}$  care verifică egalitatea

$$\sqrt{(b+d)^2 - a^2 + 4c - 4} + 2(b^2 + d^2) + c^2 - 4a + 4 = 0.$$

*Prof. George-Florin Șerban, Brăila*

Soluție. Condiție  $(b+d)^2 - a^2 + 4c - 4 \geq 0$ , dar  $2(b^2 + d^2) \geq (b+d)^2 \geq a^2 - 4c + 4, \dots, 1p$  (inegalitatea

C.B.S.), rezultă  $2(b^2 + d^2) + c^2 - 4a + 4 \geq a^2 - 4c + 4 + c^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 + (c-2)^2 \geq 0, \dots, 2p$

rezultă  $(b+d)^2 - a^2 + 4c - 4 = 2(b^2 + d^2) + c^2 - 4a + 4 = 0, \dots, 1p$

adică  $(a-2)^2 + (c-2)^2 = 0, (a-2)^2, (c-2)^2 \geq 0$ , deci  $a-2 = c-2 = 0, a = c = 2$ , rezultă  $b^2 + d^2 = 0$ ,

$b^2, d^2 \geq 0, b = d = 0, \overline{abcd} = 2020, \dots, 3p.$