

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A V-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Determinați numărul \overline{abc} care verifică egalitatea $\overline{9abc} = 2 \cdot \overline{abc5} + 1694$.

Soluție:

$$\text{Cum } U(2 \cdot \overline{abc5} + 1694) = 4 \Rightarrow c = 4 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obținem că } 9000 + 100a + 10b + 4 = 2000a + 200b + 80 + 10 + 1694 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rezultă că } 9004 + 100a + 10b = 2000a + 200b + 1784 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din această egalitate obținem că } 7220 = 190(10a + b), \text{ de unde } \overline{ab} = 38 \Rightarrow \overline{abc} = 384 \dots\dots\dots 3p$$

prof. Mihaela Baltă, Brăila

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule k și n știind că $2023 + k! = n^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Soluție. Pentru $k \geq 5$, ultima cifră a lui $k!$ este 0, deci ultima cifră a lui $2023 + k!$ este 3, care nu este ultimă cifră a unui pătrat perfect. 3p

$$k = 2 \Rightarrow 2023 + 2! = 2023 + 2 = 2025 = 45^2 \Rightarrow n = 45 \dots\dots\dots 2p$$

Analog, se verifică cazurile $k = 1, k = 3, k = 4$ și se obțin valori care nu sunt pătrate perfecte. 2p

G.M. nr. 10/2023

Problema 3. Aflați restul împărțirii numărului $A = 2^{4k} + 2^{4k+2}$ la 100, unde k este număr natural nenul.

prof. Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

$$\text{Avem } 2^{4k} + 2^{4k+2} = 16^k + 16^k \cdot 4 = 16^k \cdot 5 = 16^{k-1} \cdot 80 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Pentru } k = 1 \Rightarrow A = 80, \text{ deci restul împărțirii numărului } A \text{ la } 100 \text{ este } 80 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Pentru } k \neq 1 \text{ ultima cifră a numărului } 16^{k-1} \text{ este } 6 \Rightarrow \text{restul împărțirii numărului } A \text{ la } 100 \text{ este } 80 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4. Determinați numerele naturale a, b, c , știind că

$$5^a \cdot 2^{a+1} + 5 \cdot 2^c + 2 \cdot \overline{ba} - 2^a = 2024 - 1^{2024}$$

prof. Florentina Negoită, Brăila

Soluție. Pentru $a \neq 0, 2024 - 1^{2024} = 2023$, numerele $5^a \cdot 2^{a+1}, 2 \cdot \overline{ba}, 2^a$ sunt numere pare. Ca urmare,

$5^a \cdot 2^{a+1} + 2 \cdot \overline{ba} - 2^a$ este număr par și, cum 2023 este impar, rezultă că $5 \cdot 2^c$ este număr impar. Deci $c = 0 \dots\dots\dots 2p$

$$5^a \cdot 2^{a+1} = 5^a \cdot 2^a \cdot 2 = 10^a \cdot 2 < 2023 \Rightarrow a \leq 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 3 \Rightarrow 5^3 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^0 + 2 \cdot \overline{b3} - 2^3 = 1997 + 2 \cdot \overline{b3} = 2023 \Rightarrow 2 \cdot \overline{b3} = 26 \Rightarrow b = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Se verifică prin calcul, cazurile $a = 0, a = 1, a = 2$ și se observă că nu convin. 2p